

Problème : Nombres Complexes.

I. Soit (O, i, j) un repère orthonormé, f et g deux applications de \mathbb{C} vers \mathbb{C} définies par :

$$f(z) = z^3 + 4(1 - i)z^2 - 2(2 + 7i)z - 16 + 8i$$

$$g(z) = z^3 + 2 - 2i$$

1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z vérifiant $g(z) = 0$.

Représenter les points dont les affixes sont les nombres trouvés et démontrer que ces points forment un triangle équilatéral.

2. Démontrer qu'il existe un et un seul réel r , que l'on déterminera, qui vérifie $f(r) = 0$.

Déterminer les deux nombres complexes a et b de façon à avoir :

$$f(z) = (z - r)(z^2 + az + b) \text{ pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}.$$

3. Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, f(z) = 0$.

Démontrer que les points dont les affixes sont les solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan P .

On notera C celui dont l'affixe est réelle, A celui dont l'affixe a une partie réelle négative, et B le dernier.

II. A tout point M de P d'affixe z on associe le point M' de P d'affixe : $f(z) - g(z)$.

1. Déterminer les coordonnées (x', y') de M' dans le repère (O, i, j) en fonction des coordonnées (x, y) de M dans le même repère.

2. A, B, C sont les points définis en **I.3**. Donner une équation de l'ensemble H_1 des points M de P tels que O, B et M' soient alignés.

Démontrer que H_1 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

3. Donner une équation de l'ensemble H_2 des points M de P tels que O, I et M' soient alignés, I étant le centre de gravité de A, B et C .

Démontrer que H_2 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

(On pourra, par exemple, donner une équation de H_2 sous la forme $y = \varphi(x)$)

4. Démontrer qu'un point M est commun à H_1 et H_2 si et seulement si M' est confondu avec O .

Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, f(z) = g(z)$.

En déduire les points communs à H_1 et H_2 .

Construire H_1 et H_2 dans le repère (O, i, j) .