Prépas MPSI

Devoir Surveillé :

⋆ ⋆ ⋆

Complexes, Géométrie Plane.

Durée : 2Heures.

⋆ ⋆ ⋆

On note P le plan muni d'un repére orthonormé direct.

On considére l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par : $z \mapsto f(z) = 2.z.(1-z)$.

On désigne par F l'application de P dans lui même qui, à M d'afixe z associe M' d'affixe $z' = f(z)$.

1. Déterminer l'ensemble des points :
   (a) invariant par F (c'est à dire tel que : $F(M) = M$.)
   (b) ayant pour image par F le point A d'affixe -4.
   (c) ayant pour image le point B d'affixe $2.i + 2$.
   (d) ayant au moins un antécédant par F.
   (e) ayant exactement un antécédant par F.
2. A quelle condition sur $M_1,\ M_2 \in P$ a-t-on : $F(M_1) = F(M_2)$?
3. Soit D la droite du plan d'équation $y = 0$. Déterminer et dessiner :
   (a) L'image de D par F (c'est à dire l'ensemble $F(D) = \{M' \in P, \exists M \in D,\ M' = F(M)\}$).
   (b) L'image réciproque de D par F (c'est à dire : $F^{-1}(D) = \{M \in P,\ F(M) \in D\}$).
4. Soit Δ la droite d'équation $x = 0$.
   (a) Déteminer et dessiner l'image de Δ par F.
   (b) Déterminer l'image réciproque de Δ par F (on ne cherchera pas à tracer cette courbe.)
5. Soit (C_1) le demi cercle $\{M(z) \in P,\ \exists t \in 0, \pi],\ z = e^{i.t}\}$.
   (a) Calculer pour $z = e^{i.t},\ t \in [0, \pi]$, le module et un argument de $f(z)$ en fonction de t.
   (b) Représenter les points d'affixe $f(z)$ pour $z = e^{i.t}$ et $t \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2.\pi}{3}, \frac{5.\pi}{6}, \pi\}$.
   Donner l'allure de la courbe $\Gamma_1 = F(C_1)$.
   On admettra que cette courbe admet une tangente verticale aux points d'affixe $f(1)$ et $f(-1)$.
   (c) Déterminer l'image par F de $(C_2) = \{M(z) \in P,\ \exists t \in [-\pi, 0],\ z = e^{i.t}\}$ avec un argument de symétrie, puis tracer finalement l'image par F du cercle unité (C) de centre 0 et de rayon 1.