Notations. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \ : \ \theta \in \mathbb{R}\}$, $P = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Im(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$.

Définition. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que : $a.d - b.c \neq 0$.
On appelle homographie définie par la relation $h(z) = \dfrac{a.z+b}{c.z+d}$ l'application h à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui à tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $c.z + d \neq 0$ associe $\dfrac{a.z+b}{c.z+d}$.

Partie I- Exemple
Soit h l'homographie définie par

$$h(z) = i.\frac{1+z}{1-z}.$$

1. (a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$ on $h(z) \in \mathbb{R}$.
   (b) Vérifier que : $\forall z \in D, \ h(z) \in P$.
   (c) Déterminer les complexes z tels que : $h(z) = z$.
   (d) Pour quels $Z \in \mathbb{C}$ l'équation $h(z) = Z$ d'inconnue $z \neq 1$ posséde-t-elle une solution ?
2. Soit g l'homographie définie par : $g(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.
   (a) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{R} \ : \ g(z) \in \mathbb{U}$.
   (b) Vérifier que : $\forall z \in P, \ g(z) \in D$.

Partie II - Homographies conservant $\mathbb{U}$
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par :

$$h(z) = \frac{e^{i.\theta}}{z}.$$

1. Montrer que : $\forall z \in U, \ h(z) \in \mathbb{U}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par :

$$h(z) = e^{i.\theta}\frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}.z+1}.$$

   (a) Montrer que h est bien une homographie et que h est définie sur $\mathbb{U}$.
   (b) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.
3. Inversement, nous allons démontrer que seules les homographies h précédentes sont telles que : $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.
   (a) Etablir que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha+\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2.Re(\overline{\alpha}.\beta).$$

   (b) Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Etablir que :

$$(\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2.Re(b.e^{-i\theta}) = 0) \Rightarrow a = b = 0.$$

4. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que : $a.d - b.c \neq 0$ et h définie par $h(z) = \dfrac{a.z+b}{c.z+d}$ une homographie définie sur $\mathbb{U}$ telle que : $\forall z \in \mathbb{U}, \ h(z) \in \mathbb{U}$.
   (a) Etablir que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ |a|^2 + |b|^2 + 2.Re(\overline{a}.b.e^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2.Re(\overline{c}.d.e^{-i\theta}).$$

   (b) En déduire que : $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\overline{a}.b = \overline{c}.d$.
   (c) Si $a = 0$ Montrer que l'homographie h est du type souhaité.
   (d) Si $a \neq 0$ Etablir que :

$$(|a|^2 - |c|^2).(|a|^2 - |d|^2) = 0.$$

   (e) Vérifier que le cas $|a| = |c|$ est impossible.
   (f) Vérifier que le cas : $|a| = |d|$ conduit à une homographie h du type souhaité.