**Prépas MPSI - Devoir Surveillé :**

⋆⋆⋆

**Dérivabilité, Théorie des ensembles.**

**Durée : 3Heures.**

⋆⋆⋆

## Probléme :

Un intervalle $I$ est dit **stable** par une fonction $f$ si et seulement si : $\forall x \in I, f(x) \in I$.

**Partie A :**

**A.1.** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \dfrac{x-1}{x} - \ln|x|$.

Etudier les varaitions de $g$ ; en déduire le signe de $g(x)$. Montrer en particulier qu'il existe un unique réel négatif $\alpha$ tel que : $g(\alpha) = 0$ ; donner une valeur approchée de $\alpha$ à $0,1$ prés.

**A.2.** Soit $h$ la fonction définie pour $x > 1$ par : $h(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$.

Montrer que $h'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}.u(x)$, où $u$ est une fonction que l'on déterminera. Etudier les variations de $u$, le signe de $u(x)$, puis le signe de $h'(x)$ pour $x > 1$.

**Partie B :**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$.

**B.1.** Déterminer l'ensemble de définition de $f$ et les limites de $f$ aux bornes des intervalles de définition. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité au point 1. On notera toujours $f$ la fonction ainsi prolongée.

**B.2.** On admer que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\dfrac{1}{2}$.
Montrer que la fonction $f$ est dérivable au point 1 et calucler $f'(1)$.

**B.3.** Etudier les variations de $f$ et construire sa courbe représentative dans un repére onrthonormal. On calculera : $f(-1)$, $f(\frac{3}{2})$, $f(2)$ et $f(4)$.

**Partie C :**

On se propose d'étudier la suite $u$ définie par la condition initiale $u_0 = 4$ et la relation de récurrence :

$u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**C.1.** Montrer qu'il existe un réel $k \in ]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in [\frac{3}{2}, +\infty[: \quad |f'(x)| \leq k.$$

**C.2.** Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation : $f(x) = x$.

**C.3.** Montrer que l'intervalle $[\frac{3}{2}, 4]$ est stable par $f$.

**C.4.** Des questions précédentes, déduire la convergence de la suite $(u_n)$.

## Exercice :

Soit $E$ un ensemble et $A$, $B$ deux parties de $E$.

**1.** Discuter et résoudre l'équation : $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

**2.** Discuter et résoudre l'équation : $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.