Exemples de matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).
On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.
Pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est semblable à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$.
On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$ sont deux bases de E, si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}^*$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}^*$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

1. On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B. Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pourra désormais dire que les matrices A et B sont semblables.
2. Démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.
3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels. On considère l'application w de $\operatorname{Ker} u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i$.
   (b) En déduire que $\dim\left(\operatorname{Ker} u^{i+j}\right) \leqslant \dim\left(\operatorname{Ker} u^i\right) + \dim\left(\operatorname{Ker} u^j\right)$.
4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 2$.
   (a) Montrer que $\dim\left(\operatorname{Ker} u^2\right) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question 3b.)
   (b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
   (c) Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.
5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 1$.
   (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
   (b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\operatorname{Ker} u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.
   (c) Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}. On pose alors :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $P^{-1}AP = T = I_3 + N$

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
3. On suppose dans cette question que $\operatorname{rg} N = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
   (a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   et en déduire en utilisant la question 4 une matrice semblable à la matrice M.
   (b) Calculer M^3 et déterminer $\operatorname{rg} M$.
   (c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.
   (d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
4. On suppose dans cette question que $\operatorname{rg} N = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
5. **Exemple** : soit la matrice :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).

(b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.

(c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

6. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul et irrationnalité de $\zeta(2) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$

Dans ce problème, pour une fonction f et un entier naturel k, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction f avec : $f^{(0)} = f$.

Remarque : sauf s'il est précisé entier naturel, un entier peut être positif ou négatif.

Convergence de la suite $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$

Dans cette partie, p et n sont deux entiers naturels non nuls et on pose :

$$S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$$

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \leqslant \frac{1}{k^p}$$

2. Montrer que pour $n \geqslant 2$:

$$S_n(p) - 1 \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \leqslant S_{n-1}(p)$$

3. Démontrer, par un calcul d'intégrales, que la fonction $x \mapsto 1/x^p$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $p \geqslant 2$.
4. Montrer que la suite $(S_n(p))_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si $p \geqslant 2$. On note alors :

$$\zeta(p) = \lim_{n\to\infty} S_n(p)$$

Calcul de $\zeta(2)$

Dans cette partie on pose, pour t réel :

$$h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$$

et on définit la fonction φ sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \frac{h(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \quad \text{pour } t \in]0, \pi]$$

1. Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.
2. Calculer, pour tout k entier naturel non nul :

$$\int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$$

3. Calculer, pour $t \in]0, \pi]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$$

puis déterminer une constante λ telle que :

$$\forall t \in]0, \pi] \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \lambda$$

4. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour toute fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \pi]$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \psi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t = 0$$

5. Montrer que :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$\zeta(2)$ **est irrationnel**

Dans cette partie, pour n entier naturel non nul et x réel, on pose :

$$f_n(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!}$$

1. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.
   (a) Montrer qu'il existe $n+1$ entiers $e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n}$ tels que :
   $$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} e_i x^i$$
   (b) Montrer que pour tout entier naturel k, $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ sont des entiers. *On pourra remarquer que $f_n(x) = f_n(1-x)$.*

On veut montrer que π^2 est un irrationnel, et on va raisonner par l'absurde : on suppose que $\pi^2 = a/b$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

2. On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :
   $$F_n(x) = b^n \left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right)$$
   (a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.
   (b) On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :
   $$g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x) \quad \text{et} \quad A_n = \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$$
   Montrer que, pour n entier naturel non nul et x réel :
   $$g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$$
   et montrer que A_n est un entier.
3. On pose, toujours pour le même entier a :
   $$u_n = \frac{a^n}{n!}$$
   (a) En considérant le quotient u_{n+1}/u_n, montrer que :
   $$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$
   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$:
   $$\frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2}$$
   (c) Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$:
   $$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}$$
   (d) Montrer alors que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $A_n \in \left]0,1\right[$ et conclure que π^2 est irrationnel.
   (e) Comment peut-on déduire de ce qui vient d'être fait que π est irrationnel ?

Pour information : Il a été prouvé depuis le 18e siècle, que $\zeta(p)$ est irrationnel pour tout entier pair $p \geqslant 2$. Récemment (1979) il vient d'être découvert que $\zeta(3)$ est irrationnel et le mystère demeure encore quant à l'irrationnalité des $\zeta(p)$ pour les entiers impairs $p \geqslant 3$.