



Problème I

Soit (u_n) une suite de réels non nuls, on lui associe la suite (p_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = \prod_{p=1}^n u_p = u_1 u_2 \cdots u_n$$

On dit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie *non nulle*. Sinon, on dit que le produit (p_n) diverge.

Première partie

1. En considérant le quotient p_{n+1}/p_n montrer que, pour que le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.
2. Soit

$$p_n = \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

Montrer que

$$\forall n \geq 1 \quad p_n = n + 1$$

Quelle est la nature du produit (p_n) ?

3. Soient un réel a différent de $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et

$$p_n = \prod_{p=1}^n \cos \frac{a}{2^p}$$

Pour tout entier naturel n non nul, calculer $p_n \sin(a/2^n)$ en déduire que le produit (p_n) converge et donner la limite de la suite (p_n) .

Deuxième partie

1. Soit (p_n) un produit associé à une suite (u_n) qui converge vers 1.
 - (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n > 0$$

- (b) On pose

$$S_n = \sum_{p=n_0}^n \ln u_p$$

Montrer que la convergence de la suite (S_n) équivaut à la convergence du produit (p_n) . Lorsque (S_n) converge vers l donner la limite de la suite (p_n) en fonction de l .

2. Soit

$$p_n = \prod_{p=1}^n \sqrt[p]{p} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p}$$

- (a) Montrer que

$$\forall p \geq 3 \quad \int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln p}{p}$$

- (b) En déduire la nature de la suite (S_n) et du produit (p_n) .

Troisième partie

1. Soit

$$p_n = \prod_{p=1}^n (1 + v_p)$$

où (v_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. On pose

$$S'_n = \sum_{p=1}^n v_p$$

- (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(1+x) < x$$

- (b) Montrer que la suite (S'_n) est croissante.

- (c) Montrer que si la suite (S'_n) converge, alors le produit (p_n) converge.

2. Déduire de la question 2 (de la partie I) la limite de la suite (S'_n) définie par

$$S'_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

3. Soit

$$p_n = \prod_{p=1}^n (1 + a^{2^p})$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

- (a) Que dire de la nature du produit (p_n) lorsque $a \geq 1$?
- (b) On suppose $a \in]0, 1[$
 - i. Montrer que le produit (p_n) converge.
 - ii. Pour tout entier naturel n non nul, calculer $(1 - a^2) p_n$ et en déduire la limite de la suite (p_n) .

Problème II

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et u un endomorphisme de E . On désigne par $\text{Ker } u$ le noyau de u et $\text{Im } u$ l'image de u . Pour tout entier k strictement positif u^k désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ u \circ \dots \circ u$ (k fois) et u^0 désigne l'application identique de E .

Première partie

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{R} dont une base est $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit u l'endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer le rang de u et donner une base de $\text{Im } u$, une base de $\text{Ker } u$ en fonction des vecteurs de la base B .
- (b) Calculer M^2 , M^3 et montrer que pour tout entier $p \geq 2$, il existe un réel α_p et une matrice A telle que $M^p = \alpha_p A$. Expliciter alors M^p .
- (c) i. Donner une base, en fonction des vecteurs de la base B , de chacun des sous-espaces vectoriels suivants : $\text{Im } u^2$, $\text{Ker } u^2$, $\text{Im } u^3$, $\text{Ker } u^3$

ii. Déterminer :

$$\forall k \geq 2 \quad \text{Ker } u^k \quad \text{et} \quad \text{Im } u^k$$

iii. Montrer que $E = \text{Ker } u^2 \oplus \text{Im } u^2$

2. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps \mathbb{K} et d l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P' .
 - (a) d est-il injectif? d est-il surjectif? Comment peut-on en déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie?
 - (b) Déterminer

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad \text{Ker } d^q$$

Deuxième partie

Soit u un endomorphisme de E , pour tout entier naturel p , on notera

$$I_p = \text{Im } u^p \quad \text{et} \quad K_p = \text{Ker } u^p$$

1. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad K_p \subset K_{p+1} \quad \text{et} \quad I_{p+1} \subset I_p$$

2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad I_p \quad \text{et} \quad K_p$$

3. On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.

- (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
- (b) Montrer qu'alors $I_r = I_{r+1}$ et que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad K_r = K_{r+p} \quad \text{et} \quad I_r = I_{r+p}$$

(c) Montrer que

$$E = K_r \oplus I_r$$

4. Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?