



Problème I

1. On suppose que le produit (p_n) converge. Montrons que (u_n) converge vers 1. On a :

$$\forall n \geq 2 \quad u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$$

Or, par convergence du produit (p_n) , on en déduit qu'il existe $l \neq 0$ tel que $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.

Donc $u_n = p_n/p_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

Si le produit (p_n) converge, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

2. Puisque $1 + 1/p = (p + 1)/p$, on en déduit que :

$$p_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n}$$

Ce qui montre immédiatement que $p_n = (n + 1)$. Montrons rigoureusement ce résultat par récurrence sur n .

$$\mathcal{H}_n : \ll p_n = n + 1 \gg$$

- \mathcal{H}_1 est vraie. En effet $p_1 = 2$.

- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$. En effet, soit $n \geq 1$. On suppose que \mathcal{H}_n est vraie. Montrons que \mathcal{H}_{n+1} est vraie. On a :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \prod_{p=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{n+2}{n+1} (n+1) = n+2 = (n+1) + 1 \end{aligned}$$

Donc \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

Par récurrence sur n on en déduit que \mathcal{H}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = n + 1$
Comme $n + 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, on en déduit que le produit (p_n) diverge.

3. Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n \sin \frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sin a$$

En effet, en posant :

$$\mathcal{H}_n : \ll p_n \sin \frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sin a \gg$$

- \mathcal{H}_1 est vraie. En effet :

$$p_1 \sin \frac{a}{2} = \cos \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \sin a$$

- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$. En effet, soit $n \geq 1$. On suppose que \mathcal{H}_n est vraie. Montrons que \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned} p_{n+1} \sin \frac{a}{2^{n+1}} &= \sin \frac{a}{2^{n+1}} \prod_{p=1}^{n+1} \cos \frac{a}{2^p} \\ &= \sin \frac{a}{2^{n+1}} \cos \frac{a}{2^{n+1}} \prod_{p=1}^n \cos \frac{a}{2^p} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{a}{2^n} \prod_{p=1}^n \cos \frac{a}{2^p} \\ &= \frac{1}{2} p_n \sin \frac{a}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} \sin a \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sin a \end{aligned}$$

Donc \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

Par récurrence, on en déduit que \mathcal{H}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n \sin \frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sin a$$

Puisque a n'est pas un multiple de π , on en déduit que $a/2^n$ n'en est pas un non plus. On en déduit donc que $\sin(a/2^n) \neq 0$. Donc :

$$\forall n \geq 1 \quad p_n = \frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}$$

Or, puisque $a/2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\sin x/x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, on a :

$$2^n \sin \frac{a}{2^n} = a \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$$

En conclusion :

$$\boxed{p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin a}{a}}$$

1. (a) Puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et que $1 > \frac{1}{2}$, on en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq \frac{1}{2}$$

En particulier :

$$\boxed{\forall n \geq n_0 \quad u_n > 0}$$

(b) Supposons que la suite (S_n) soit convergente et montrons que le produit (p_n) converge. On a :

$$\forall n \geq n_0 \quad p_n = \underbrace{\prod_{p=1}^{n_0-1} u_p}_{=A} \prod_{p=n_0}^n u_p$$

Remarquons que $A \neq 0$ puisque, par définition, la suite (u_p) ne s'annule jamais. Or :

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 \quad \prod_{p=n_0}^n u_p &= e^{\ln \prod_{p=n_0}^n u_p} \\ &= e^{\sum_{p=n_0}^n \ln u_p} \\ &= e^{S_n} \end{aligned}$$

Par continuité de l'exponentielle et convergence de la suite (S_n) , on en déduit que la suite (p_n) est convergente et que sa limite est non nulle (c'est le produit de A et de l'exponentielle de la limite de (S_n)).

Réciproquement, supposons que le produit (p_n) soit convergent. Soit $l \in \mathbb{R}^*$ sa limite. Montrons que la suite (S_n) est convergente.

$$\forall n \geq n_0 \quad p_n = \underbrace{\prod_{p=1}^{n_0-1} u_p}_{=A \neq 0} \prod_{p=n_0}^n u_p$$

Donc :

$$\forall n \geq n_0 \quad \prod_{p=n_0}^n u_p = \frac{p_n}{A}$$

Donc, en composant par \ln , il vient :

$$\forall n \geq n_0 \quad S_n = \ln \frac{p_n}{A}$$

Puisque $l \neq 0$, par continuité de \ln en $l/A > 0$, on en déduit que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{l}{A}$.

En conclusion, (S_n) converge si et seulement si le produit (p_n) est convergent. De plus, dans ce cas :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \left(\prod_{p=1}^{n_0-1} u_p \right) e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n}$$

2. (a) Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$$

D'après les théorèmes usuels, φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x > 0 \quad \varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad \varphi'(x) \leq 0 &\iff 1 - \ln x \leq 0 \\ &\iff \ln x \geq 1 \\ &\iff x \geq e \end{aligned}$$

On en déduit que φ est décroissante sur $[e, +\infty[$.

Soit $p \geq 3$. Comme $e \leq 3$, φ est décroissante sur $[p, p+1]$. On en déduit donc que :

$$\forall x \in [p, p+1] \quad \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln p}{p}$$

Donc, par intégration :

$$\int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \int_p^{p+1} \frac{\ln p}{p} dx = \frac{\ln p}{p}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall p \geq 3 \quad \int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln p}{p}}$$

(b) D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 \forall n \geq 3 \quad S_n &= \frac{\ln 2}{2} + \sum_{p=3}^n \frac{\ln p}{p} \\
 &\geq \frac{\ln 2}{2} + \sum_{p=3}^n \int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x} dx \\
 &\geq \frac{\ln 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx \\
 &\geq \frac{\ln 2}{2} + \left[\frac{1}{2} \ln^2 x \right]_3^{n+1} \\
 &\geq \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \ln^2 3 + \frac{1}{2} \ln^2 (n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty
 \end{aligned}$$

On en déduit donc, que la suite (S_n) diverge. Comme les hypothèses de la question 1 sont donc réunies ($\sqrt[p]{p} = \exp((\ln p)/p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$), on en déduit que le produit (p_n) diverge.

La suite (S_n) et le produit (p_n) sont divergents.

1. (a) Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall x \geq 0 \quad \varphi(x) = x - \ln(1+x)$$

D'après les théorèmes usuels, φ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall x \geq 0 \quad \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

En particulier, pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x) \geq 0$ et $\varphi'(x)$ ne s'annule qu'en 0, donc φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Puisque $\varphi(0) = 0$, on en déduit :

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) > 0$$

Autrement dit :

$$\forall x > 0 \quad \ln(1+x) < x$$

(b) Soit $n \geq 1$. Alors :

$$S'_{n+1} - S'_n = v_{n+1} \geq 0$$

Donc :

La suite (S'_n) est croissante.

(c) On suppose que la suite (S'_n) converge. Montrons qu'il en est de même du produit (p_n) . La suite (p_n) est une suite de termes strictement positifs telle que $p_{n+1}/p_n = 1 + v_{n+1} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que cette suite est croissante. Montrons qu'elle est majorée. Puisque (S'_n) est croissante, elle est majorée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que $S'_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la question 1.a, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln p_n = \sum_{p=1}^n \ln(1+v_p) \leq \sum_{p=1}^n v_p \leq M$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n \leq e^M$$

On en déduit que (p_n) est croissante majorée, donc converge. De plus puisque $p_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette limite est non nulle.

Si la suite (S'_n) converge, alors le produit (p_n) converge.

2. La suite (S'_n) est croissante, donc soit elle est majorée soit elle diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle soit majorée. Alors elle est convergente. D'après la question précédente, on en déduit que le produit

$$\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

est convergent, ce qui est absurde d'après la question 2 de la première partie. En conclusion :

La suite $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ diverge.

3. (a) On suppose $a \geq 1$. Alors

$$\forall p \geq 1 \quad 1 + a^{2^p} \geq 2$$

donc la suite $(1 + a^{2^p})$ ne converge pas vers 1. D'après la question 1 de la première partie, on en déduit que :

Lorsque $a \geq 1$, le produit (p_n) est divergent.

(b) i. Puisque $a \in]0, 1[$, on en déduit que $a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc que $1 + a^{2^p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$.

Nous sommes donc dans le cas de la question 1 et il suffit de montrer que la suite $\sum_{p=1}^n a^{2^p}$ est convergente. Or cette suite est croissante. Comme de plus $2^p \geq p$, donc $a^{2^p} \leq a^p$, on en déduit que :

$$\forall p \geq 1 \quad \sum_{p=1}^n a^{2^p} \leq \sum_{p=1}^n a^p \leq \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \leq \frac{1}{1 - a}$$

Cette suite est donc convergente en tant que suite croissante majorée. En conclusion

Lorsque $a \in]0, 1[$, le produit (p_n) converge.

ii. Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 1 \quad (1 - a^2) p_n = 1 - a^{2^{n+1}}$$

On pose donc :

$$\mathcal{H}_n : \ll (1 - a^2) p_n = 1 - a^{2^{n+1}} \gg$$

- \mathcal{H}_1 est vraie. En effet :

$$(1 - a^2) p_1 = (1 - a^2) (1 + a^2) = 1 - a^4 = 1 - a^{2^{1+1}}$$

- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$. Soit $n \geq 1$. On suppose que \mathcal{H}_n est vraie et on souhaite

montrer que \mathcal{H}_{n+1} est vraie. En effet :

$$\begin{aligned} (1 - a^2) p_{n+1} &= (1 - a^2) p_n (1 + a^{2^{n+1}}) \\ &= (1 - a^{2^{n+1}}) (1 + a^{2^{n+1}}) \quad (\text{d'après } \mathcal{H}_n) \\ &= 1 - a^{2^{(n+1)+1}} \end{aligned}$$

Donc \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

Par récurrence sur n on en déduit que \mathcal{H}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1 - a^2) p_n = 1 - a^{2^{n+1}} \\ \text{En particulier } p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{1 - a^2}. \end{array}}$$