Épreuve des petites mines, commune, 1995

Problème 1

Les parties II et III sont indépendantes et utilisent les résultats établis à la partie I.

Notations : Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I, dont la dérivée f' est continue sur I.

Partie I

1. On définit la fonction φ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \quad \text{si } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0$$

   (a) i. Donner le développement limité de φ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

   ii. En déduire que φ est continue et dérivable en 0. Préciser $\varphi'(0)$.

   (b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

   (c) Soit ψ la fonction définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par :

$$\psi(t) = \frac{t}{\sin t} \quad \text{si } t \neq 0 \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

   Montrer que ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Préciser $\psi'(0)$.

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, à valeurs réelles. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_a^b g(t) \sin(\lambda t) \, \mathrm{d}t$$

   tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit S_n sur $[0, \pi]$ par :

$$S_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$$

   (a) i. Montrer, *sans récurrence*, que :

$$\forall t \in]0, \pi[\quad S_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$$

   ii. Calculer $S_n(0)$ et $S_n(\pi)$.

   (b) Calculer la valeur de l'intégrale :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \, \mathrm{d}t$$

Partie II

1. (a) Déterminer la limite de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) \, \mathrm{d}t$$

   lorsque n tend vers $+\infty$.

   (b) En déduire la limite de :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

   lorsque n tend vers $+\infty$.

2. (a) i. Vérifier que la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

   se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

   ii. Comparer $F((2n+1)\pi/2)$ et I_n.

   (b) i. Soit x un réel, $x \geqslant \pi/2$. Justifier l'existence de $n \in \mathbb{N}$ (dépendant de x), tel que :

$$(2n+1)\frac{\pi}{2} \leqslant x < (2n+3)\frac{\pi}{2}$$

   On note $\alpha(x) = (2n+1)\pi/2$.

ii. Montrer que :

$$\int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

(c) En déduire que $F(x)$ admet une limite l si x tend vers $+\infty$. Préciser l.

3. (a) Soient x et y réels, tels que $y > x > 0$. Montrer que :

$$\left|\int_{x}^{y} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{x}$$

(On effectuera une intégration par parties).

(b) En déduire que :

$$\forall x > 0 \quad |l - F(x)| \leqslant \frac{2}{x}$$

Partie III

1. (a) Déterminer deux réels α et β, indépendants de n, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{\pi} \left(\alpha t + \beta t^2\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

α et β sont désormais ainsi fixés.

(b) En déduire que :

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi} \left(\alpha t + \beta t^2\right) S_n\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$$

est un réel indépendant de n, que l'on précisera.

(c) On définit la fonction h sur $]0, \pi]$ par :

$$h(t) = \frac{\alpha t + \beta t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

2. On définit les suites :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad (n \geqslant 1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad (n \geqslant 0)$$

(a) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.

(b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

Problème 2

Notations :

n est un entier naturel fixé, $n \geqslant 2$.

$\mathcal{F}$ est l'esace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) \quad \text{et} \quad T(f)(x) = f(x+1)$$

On admettra (aisément!) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ (donc si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 1$, $\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}$, $T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}$.

1. (a) i. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme. Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P.
Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

ii. Vérifier que Δ induit un endomorphisme de E_n noté Δ_n.

(b) i. Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta_n$.

ii. En déduire le rang de Δ_n. Déterminer $\operatorname{Im} \Delta_n$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad N_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad N_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

(a) i. Pour $k \geqslant 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des polynômes $(N_j)_{j\geqslant 0}$.

ii. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $\left(\Delta^j(N_k)\right)(0)$.

(b) i. Montrer que la famille $(N_0, N_1, \ldots, N_n)$ est une base de E_n.

ii. Soit $P \in E_n$. P s'écrit $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \cdots + a_n N_n$, où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Exprimer les a_j en fonction des $\left(\Delta^j(P)\right)(0)$.

3. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $\left(T^k(f)\right)(x)$.

(b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{F}$.

i. Expliciter $\Delta^j(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leqslant k \leqslant j$. (On pourra remarquer que $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$).

ii. En déduire que $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points $0, 1, \ldots, j$: $f(0), f(1), \ldots, f(j)$.

Partie II

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \deg P \leqslant n \\ \forall k \in [\![0,n]\!] \quad P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose :

$$N(x) = \prod_{j=0}^{n} (x-j) = x(x-1)\dots(x-n)$$

1. (a) Soit l'application linéaire Φ définie sur E_n à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui à P associe $(P(0), \dots, P(n))$.
   Montrer que Φ est un isomorphisme.

   (b) En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f.

2. (a) Pour $j \in [\![0,n]\!]$, comparer $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et $\left(\Delta^j(P_f)\right)(0)$.

   (b) En déduire l'expression de P_f en fonction des $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et des polynômes N_j.

3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On note :

$$M_n = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right| : t \in [0,n]\right\}$$

   (a) Soit $x \in [0,n]$, non entier. Montrer que :

$$\exists c \in]0,n[\quad f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} N(x)$$

   (On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x) = 0$, et appliquer judicieusement le théorème de Rolle.)

   (b) En déduire que :

$$\forall x \in [0,n] \quad |f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} M_n$$

   (On pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j \in [\![0, n-1]\!]$).