

✓ **VRAI OU FAUX :**

Tout en justifiant votre réponse dites si c'est vrai ou faux que :

1. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque, converge vers 0.
2. Toute suite encadrée par deux suites convergentes est convergente.
3. Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

**Exercice 1** Soit  $(u_n)_n$  une suite de nombres réels. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_n + 1} = 0.$$

**Exercice 2** On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

1. Etudier la monotonie de  $(S_n)_n$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ .
3. En déduire que  $(S_n)$  est convergente.

**Exercice 3** Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :  $u_0 = 0$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$ .

Etudier la convergence de la suite  $(u_n)_n$  et calculer sa limite éventuelle.

**Exercice 4** Soient  $a, b$  deux réels strictement positifs. On définit deux suites  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  définies par :

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}.$$

Montrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes, sans essayer de calculer leur limite commune qu'on appellera *arithmético-géométrique* de  $a$  et  $b$ .

**Exercice 5** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ .

Montrer que :

$$\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \cdot P_n = \frac{1}{2^n} \cdot \sin(a).$$

Déterminer la limite de  $P_n$ .

**Exercice 6** Soit  $(u_n)_n$  une suite de nombres réels strictement positifs.

On suppose que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ .

1. Montrer que si  $l < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
2. Montrer que si  $l > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
3. Montrer que dans le cas  $l = 1$  on ne peut rien dire.

**Exercice 7** On pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ .

1. Montrer que les suites  $(S_{2n})_n$  et  $(S_{2n+1})_n$  sont adjacentes.
2. En déduire que la suite  $(S_n)$  converge.
3. Généralisation : Soit  $(u_n)_n$  une suite de réels strictement positifs, décroissante et convergente vers 0.

Démontrer que la suite  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot u_k$  converge.

**Exercice 8** Étudier la convergence de la suite  $(z_n)_n$  définie par :

$$z_0 \in \mathbb{C}, \quad z_{n+1} = \frac{i}{2} \cdot z_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Exercice 9** Pour tout entier  $n$  strictement positif, on considère le polynôme :

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1.$$

1. Montrer que le polynôme  $P_n$  admet une unique racine positive  $\alpha_n$ .
2. (a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$ .  
(b) En déduire le sens de variation de la suite  $(\alpha_n)$  et démontrer qu'elle converge.
3. Simplifier l'expression de  $P_n(x)$  pour  $x \neq 1$  et en déduire la limite de la suite  $(\alpha_n)_n$ .

**Exercice 10** On considère la suite  $(u_n)_n$  définie par :  $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .

Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_n$ .