Exercice 1 Déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = n^{2009} - 8.n^{2008} + 2007, \qquad b_n = \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n + 1}, \qquad d_n = n^2.e^{-n},$$

$$e_n = \sqrt{n^2+1} - n, \qquad f_n = \frac{\sin(n)}{n^3}, \qquad g_n = \frac{3^n}{n^a}\ a \in \mathbb{R}, \qquad h_n = \frac{(n+2)!}{(2n^2+1).n!}.$$

Exercice 2 On considére la suite u définie par :

$$u_0 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{u_n + 2}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et déterminer ses limites éventuelles.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$.
3. En déduire que, pour tout naturel n, $|u_n - 2| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - 2|$. Conclure.

Exercice 3 Soit u la suite définie par :

$$u_0 > 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{3.u_n + 1}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, en déduire la monotonie de u.
2. La suite u est-elle convergente et calculer sa limite écventuelle ?
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq (\frac{1}{3})^n.u_0$.
   Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 4 Soit u la suite définie par :

$$u_0 > 0, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. Déterminer la monotonie de u et ses limites éventuelles.
2. On suppose que la suite u est majorée. Montrer que la suite u converge. Conclusion.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2)$ puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 2$.

   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \sqrt{2.n + u_0^2}$ et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 5 On considére la suite u définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

1. Montrer que : $\forall k \in \{1, ..., 2n\},\quad \frac{1}{n+2} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$.
2. En déduire un encadrement de (u_n) puis calculer la limite de (u_n).

Exercice 6 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C} - \{1\}\ :\ \prod_{p=0}^{n-1}(1 + z^{3^p} + z^{2.3^p}) = \frac{z^{3^n} - 1}{z - 1}.$$

Exercice 7

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ :\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2}.$$
2. En déduire que :
$$\forall m \in \mathbb{N}\ :\ \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq \frac{m}{2}.$$

Exercice 8

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt \leq \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.
3. Déterminer de même : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t).e^{-nt}dt$.

Exercice 9

1. On considére la suite u définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ u_n = \int_0^1 \sqrt[n]{\sin x}\ dx.$$
   Etudier la monotonie de u et en déduire qu'elle converge.
2. Démontrer que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2.x}{\pi} \leq \sin x \leq x$.
3. En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 10 Calculer :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\ dx.$$