Exercice 1 Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| = 1\}$ et $z \in \mathbb{U}$. montrer que :

$$z \neq 1 \Rightarrow \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 2 Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ les sommes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k.\theta) \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k.\theta).$$

Exercice 3 Calculer le produit des racines n-éme de l'unité.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

1. Résoude l'équation : $(z+1)^n = (z-1)^n$.
2. Quel est le nombres des solutions ?

Exercice 5

1. Soit θ un nombre réel appartenant à $[0, 2.\pi[$.
   Déterminer le module du nombre complexe $\alpha = 1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
2. Déterminer les nombres complexes non nuls tels que : $z,\ 1+z$ et $\dfrac{1}{z}$ aient le même module.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $4.z^2 - 16.z + 11 - 12.i = 0$.
2. $z^2 - 5.z + 4 + 10.i = 0$.
3. $z^2 + 5.z + 7 - i = 0$.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $e^z = 1 + i$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} (e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1) = n.(-1)^{n-1}.$$
2. Désmontrer alors à l'aide des formules d'Euler que :
$$\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2.\pi}{n}...\sin\frac{(n-1).\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 9 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$\left| \frac{z-5}{z-3} \right| = 1.$$

Exercice 10 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k.x + y) \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k.x).$$

Exercice 11 Soient $A,\ B$ et C les points d'affixes respectifs $a = 1 + i,\ b = -i$ et $c = -1 + 2.i$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

Exercice 12 On note A le point du plan complexe d'affixe 1 et le point B d'affixe -1, au point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$.

1. Montrer que M' est situé sur le cercle de centre O et de rayon 1 et sur la droite (AM).
2. Que dire du triangle ABM' ?
3. Donner une construction géométrique de M' à partir de M.