Feuille d'exercices MPSI: Suites Numériques.

A.ELAKILI

3 octobre 2010

Mathématiques.elakili : http ://perso.menara.ma/∼abdelakili/

AL-KHWARIZMI Abu (VIII siécle) Al-Khwarizmi est né au 8 siécle en Perse. Entre 813 et 833, il a redigé son premier livre d'algèbre dans lequel le vocabulaire algèbre apparait pour la première fois en tant que tel pour désigner une discipline. Al-Khwarizmi a introduit la notion même d'équation du premier et du second degrés. II est également a l'origine des notions de binôme et trinôme associés a l'équation, au sujet desquels il a examiné l'application des différentes lois de l'arithmétique. C'est également à lui que l'on doit le concept de la solution algorithmique. Le mot algorithme est la prononciation latine du nom d'Al-Khwarizmi, inventeur de l'algèbre.

Exercice 1 *Soit A une partie non vide de* $\mathbf{R}$. *On pose* $(-A) = \{-x/x \in A\}$.
Montrer que :

1. *Si A est majorée, $(-A)$ est minorée et on a :* $\inf(-A) = -\sup(A)$.
2. *Si A est minorée, $(-A)$ est majorée et on a :* $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels qui converge vers l. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}.(Moyenne\ de\ Cesaro)$$

Montrer que (v_n) est convergente, et converge vers l.

Exercice 3

Soit u_0 et v_0 deux nombres réels tes que : $0 < u_0 < v_0$.
On définit les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} : \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \;\; ; \;\; v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite de réels définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad u_0 = u_1 = 1.$$

Calculer u_n , puis $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 5

Ètudiez la convergence de la suite définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} : \qquad u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}.$$

Exercice 6

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

En déduire le comportement de la suite de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 7

On considére la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

En déduire la limite de la suite définie par : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 8

Soit a un réel strictement positif et la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}.(u_n + \frac{a}{u_n}).$$

Étudier la suite (u_n).

Exercice 9

Montrer que :

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n\ racines} = 2.\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}}).$$

Utiliser cette relation pour trouver la limite de la suite récurrente définie par :

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \quad n \geq 1.$$