Exercice 1
Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{2n}{2^n+n}, \quad \sum e^{-\sqrt{n}}, \quad \sum \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

$$\sum \ln(1+\frac{(-1)^n}{n}), \quad \sum (-1)^n \sqrt{n}\sin(\frac{1}{n}).$$

Exercice 2
En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries de terme général suivant (pour $n \geq 2$) sont convergentes, et dans ce cas donner leur somme :

$$u_n = \frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\ln(n).\ln(n+1)}, \quad v_n = \ln(1-\frac{1}{n}).$$

Exercice 3
Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs et : $v_n = \dfrac{u_n}{u_n+1}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 4
Aprés avoir montré l'exsitence calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ sachant que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

.

Exercice 5
Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Exercice 6
Pour $n \in \mathbb{N}*$, on pose :

$$u_n = \ln(\frac{n!e^n}{n^n.\sqrt{n}}).$$

Montrer que la suite (u_n) converge en exploitant le lien entre séries et suites.

Exercice 7
Existence et calcul de :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1-\frac{1}{n^2}), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1).3^{-n}.$$

Exercice 8
Calculer aprés avoir justifié l'existence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n.\ln(1-\frac{1}{n}).$$

Exercice 9
Etudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}).$$

Exercice 10
Nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n.\ln^\alpha(n)}.$$