Exercice 1

n et m désignent deux entiers naturels de pgcd égal à d.
Prouver que le pgcd de $X^n - 1$ et de $X^m - 1$ est égal à $X^d - 1$.
Indication : Pensez à l'algorithme d'euclide.

Exercice 2

On pose :

$$L_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}.$$

1. Vérifier que L_n est un polynôme réel, de même parité que n, dont on précisera le degré et le coéfficient dominant.
2. Calculer $L_n(1)$.
3. Etablir que L_n admet exactement n racines réelles distinctes, toutes situées dans l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Etablir l'existence d'un polynôme $E_n(X)$ de degré n dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$E_n(X+1) + E_n(X) = 2.X^n$$
. **Indication** : On pourra procéder par récurrence sur n, et on cherchera $E_n(X)$ sous forme $X^n + R(X)$.
Montrer l'unicité d'un tel polynôme.
2. Montrer que : $E'_n = n.E_{n-1}, n \geq 1$.
3. Pour $p \in \{0, 1, ..., n\}$, calculer $a_p(h)$ tel que :
$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad E_n(X+h) = \sum_{p=0}^{n} a_p(h).E_p(X).$$
4. En déduire une relation de récurrence entre les E_n et les E_p avec $p < n$.
5. Montrer que : $E_n(1-X) = (-1)^n.E_n(X)$.
6. Montrer que : $\forall n \geq 1$
   - Si n est impair alors E_n est divisible par $2.X - 1$.
   - si n est pair alors E_n est divisible par $X.(X-1)$.

Exercice 4

On considére la suite des polynômes définies par :

$$P_0 = 2, \quad P_1 = X, \quad , P_{n+1} = X.P_n - \frac{1}{4}.P_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer le degré et le coéfficient dominant de P_n.
2. Etudier la parité de P_n, et calculer $P_n(1)$, $P_n(-1)$, $P_n(0)$.
3. Montrer que :
   - $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : \quad P_n(\cos(\theta)) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n.\theta)$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(ch(x)) = \frac{1}{2^{n-1}}.ch(n.x)$
4. Montrer que pour $n \geq 1, P_n$ admet n racines distinctes et les calculer, on notera ses racines $x_k, 1 \leq k \leq n$ avec $x_k < x_{k+1}$.
5. Vérifier que : $\forall x \in [-1,1], \quad P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}.\cos(n.\arccos(x))$.

Exercice 5

Pour tout entier naturel n, on définit le polynome :

$$Q_n(X) = \frac{1}{2.i}[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}].$$

1. Déterminer le degré de Q_n.
2. Montrer que : $\forall r \in \mathbb{N}, \quad Q_{2r} = \sum_{p=0}^{r} (-1)^p.C_{2r+1}^{2p+1}.X^{2r-2p}$.
3. Déterminer les racines de Q_n. Montrer que ces racines sont réelles.
4. Prouver que : $\forall r \in \mathbb{N}, Q_{2r} = (2r+1).\prod_{k=1}^{r}(X^2 - \cot^2(\frac{k.\pi}{2.r+1}))$.
5. En déduire l'égalité : $\sum_{k=1}^{r} \cot^2(\frac{k.\pi}{2.r+1}) = \frac{r.(2r-1)}{3}$ puis $\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sin^2(\frac{k.\pi}{2.r+1})} = \frac{2r(r+1)}{3}$.
6. Montrer que : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \cot^2(x) < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2(x)}$.
7. En déduire un encadrement de : $\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{(\frac{k.\pi}{2r+1})^2}$, puis la valeur de : $\lim_{r \to +\infty} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}$.