Exercice 1 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x},\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x},\quad \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{arccos(x)},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x.\cos(e^x)}{x^2+1}.$$

Exercice 2 Etudier la parité de la fonction f définie par :

$$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x).$$

Exercice 3 Déterminer un équivalent simple aux fonctions suivantes au point x_0 considéré.

$$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\quad x_0=0,\qquad \ln(1+\sin(x))\quad x_0=0^+,\qquad \ln(\cos(x))\qquad x_0=\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4 Etudier la continuité de la fonction :

$$f: x\mapsto f(x)=\sqrt{(1-x).Arcsin(1-x)}.$$

Exercice 5 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2.x)=f(x).$$

Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 6 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T périodique ($T>0$) telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 7 Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 8 Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ continue telle que : $\lim\limits_{-\infty} f=-1$ et $\lim\limits_{+\infty} f=1$.
Montrer que f s'annule.

Exercice 9 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\lim_{+\infty} f=\lim_{-\infty} f=+\infty.$$

Montrer que f admet un minimum absolu.

Exercice 10 Montrer que $x\mapsto\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 11 Montrer que $x\mapsto\ln(x)$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 12 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}: f(x+y)=f(x)+f(y).$$

1. Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.
2. Justifier que : $\forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad f(n.x)=n.f(x)$.
3. Etablir que : $\forall r\in\mathbb{Q},\quad f(r)=r.f(1)$.
4. Conclure que pour tout $x\in\mathbb{R},\quad f(x)=x.f(1)$.