

**Exercice 1**

Démontrer que le sous-ensemble constitué des suites périodiques est un sous-espace vectoriel d'une structure que l'on précisera.

**Exercice 2**

Soit  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
Montrer que :  $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$ .

**Exercice 3**

Soit  $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = f'(0) = 0\}$  et  $G = \{x \mapsto ax + b / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .  
Mq :  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 4**

Soit  $F = \{f \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) + f(1) = 0\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un-sous espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 5** Soit  $f$  une application linéaire d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  vers un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $F$ . Montrer que pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a :

$$f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A))$$

**Exercice 6**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent.  
Montrer que  $Id - f$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $f$ .

**Exercice 7**

Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .  
Montrer que :  $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \ker(g)$ .

**Exercice 8** Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Montrer que :

1.  $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$ .
2.  $E = \text{Im}(f) + \ker(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ .

**Exercice 9**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que :  $f^2 - 3f + 2Id = 0$ .

1. Montrer que  $f$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $f$ .
2. Etablir que :  $\ker(f - Id)$  et  $\ker -f - 2Id$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .

**Exercice 10**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que  $p$  est un projecteur ssi  $Id - p$  l'est.
2. Exprimer alors  $\text{Im}(Id - p)$  et  $\ker(Id - p)$  en fonction de  $\text{Im}(p)$  et  $\ker(p)$ .

**Exercice 11**

Soit  $p, q \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence entre :

1.  $p \circ q = p$  et  $q \circ p = q$ .
2.  $p$  et  $q$  sont des projecteurs de même noyau.

**Exercice 12**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p, q$  deux projecteurs de  $E$ .  
Montrer que  $p + q$  est un projecteur de  $E$  ssi  $p \circ q = q \circ p = 0$ .  
En déterminer alors noyau et image.

**Exercice 13**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $s$  un endomorphisme de  $E$  involutif, c'est à dire :  $s^2 = Id$ .

On pose :  $F = \ker(s - Id)$  et  $G = \ker(s + Id)$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .
2. Montrer que  $s$  est la symétrie vectorielle par rapport à  $F$  et parallèlement à  $G$ .  
Plus généralement, soit  $\alpha \in \mathbb{K} - \{1\}$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que :

$$f^2 - (\alpha + 1)f + \alpha Id = 0.$$

On pose :  $F = \ker(f - Id)$  et  $G = \ker(f - \alpha Id)$ .

3. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .
4. Montrer que  $f$  est l'affinité par rapport à  $F$ , parallèlement à  $G$  et de rapport  $\alpha$ .