Sommes, Produits et Récurrence.

A.ELAKILI

26 septembre 2010

Mathématiques.elakili : http ://perso.menara.ma/∼abdelakili/

1 Sommes.

Définition : Soient $p \leq n$ deux entiers, on désigne par $[|p,n|] = \{p, p+1, ..., n\}$ l'ensemble des entiers naturels compris entre p et n.

Remarque : Il y a n nombres entiers dans l'ensemble $[|1,n|]$, et $n+1$ dans $[|0,n|]$. Plus généralement, il y a $n-p+1$ entiers naturels dans l'ensemble $[|p,n|]$.

Définition : Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ $n+1$ entiers quelconques, la notation $\sum_{k=1}^{n} a_k$ désigne la somme : $a_0 + a_1 + ... + a_n$.

Propriétés :

- **linéarité :** $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda.a_k = \lambda.\sum_{k=1}^{n} a_k$.
- **Relation de Chasle :** $\sum_{k=1}^{p+q} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{p+q} a_k$.
- $\forall \alpha \in \mathbf{R}$: $\sum_{k=1}^{n} \alpha = \alpha.\sum_{k=1}^{n} 1 = n\alpha$.

Définition :

On appelle **Somme téléscomique** toute somme de la forme :
$\sum_{k=p}^{n}(a_k - a_{k+1})$ ou $\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1} - a_k)$.

Proposition :

$$\sum_{k=p}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_p - a_{n+1}.$$

Exemple :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \frac{[(k+1)^2 - k^2 - 1]}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2 - k^2] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{2}[(n+1)^2 - 1] - \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque : On peut effectuer des changements d'indinces comme suit :

$$\sum_{k=p}^{n} a_{k+l} = \sum_{j=p+l}^{n+l} a_j = \sum_{k=p+l}^{n+l} a_k.$$

2 Produits.

Définition : Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ le produit $a_0.a_1...a_n$ sera noté comme suit :

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_0.a_1...a_n$$

Exemple :

$$\prod_{k=1}^{n} e^k = \exp(\sum_{k=1}^{n} k) = e^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Propriétés : On a les propriétes suivantes :

- $\prod_{k=1}^{n}(a_k.b_k) = (\prod_{k=1}^{n} a_k).(\prod_{k=1}^{n} b_k).$
- $\prod_{k=1}^{p+q} a_k = (\prod_{k=1}^{p} a_k).(\prod_{k=p+1}^{p+q} a_k).$
- Pour tout λ dans $\mathbf{R}$ on a : $\prod_{k=1}^{n} \lambda = \lambda^n.$

Remarque :

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ le produit $n.(n-1)...2.1$ est noté $n!$ et on lit "factorielle n".
On convient que $0! = 1$.

3 Raisonnement par Récurrence.

Principe du raisonnement par raisonnement par récurrence :

Soit à démontrer :

$$\forall n \geq n_0 : \quad P(n).$$

où P est une propriété dépendant de l'entier naturel n (exemple : $2^n \geq n+1$).

La démonstration par récurrence consite à :

1. Vérifier que la propriété est vrai pour la valeur n_0 : c'est l'initialisation de la récurrence.
2. Se fixer un $n \geq n_0$ **quelconque**, supposer que la propriété est vraie pour n et montrer qu'elle est vraie pour le rang $n+1$.

Dans ce cas, on conclut que pour tout $n \geq n_0$ la propriété $P(n)$ est vraie.

Exercice : Montrer par récurrence :

1. $$\forall n \in \mathbf{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. $$\forall n \in \mathbf{N} : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$