

Corrigé : C.C.P. 2001, filière PSI.

Problème 1

Partie I

1.1. La série géométrique $\sum (-1)^k x^k$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$ et dans ce cas sa somme est $\frac{1}{1+x}$.

1.2. $R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$. Au facteur $\frac{-x}{1+x}$ près, $\sum R_n(x)$ est encore une série géométrique de raison $-x$.

On en déduit la convergence de $\sum R_n(x)$ et l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}$.

2.1. $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge d'après le théorème des séries alternées.

2.2.1. - $\sum_{k=n}^m (-1)^k x^k = \sum_{k=n}^m (R_{k-1}(x) - R_k(x)) = R_{n-1}(x) - R_m(x)$, par télescopage.

- D'où $\left| \sum_{k=n}^m (-1)^k x^k \right| \leq |R_{n-1}(x)| + |R_m(x)| = \frac{|x|^n}{1+x} + \frac{|x|^{m+1}}{1+x} \leq 2$.

2.2.2. n étant fixé, la suite de fonctions $(R_{n-1} - R_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I_0 vers R_{n-1} et elle est, d'après l'inégalité du 2.2.1., dominée par la fonction constante de valeur 2, qui est intégrable sur I_0 .

D'après le théorème de convergence dominée, $\int_{I_0} (R_{n-1}(x) - R_m(x)) dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_{I_0} R_{n-1}(x) dx$.

Compte tenu de l'égalité du 2.2.1. et de la linéarité de l'intégrale, il s'agit de la propriété demandée.

$$\int_{I_0} (-1)^k x^k dx = \frac{(-1)^k}{k+1}; \text{ on obtient ainsi } \int_{I_0} R_{n-1}(x) dx = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = r_n.$$

2.2.3. $r_0 = \int_0^1 R_{-1}(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$. On retrouve la valeur connue de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

2.2.4. $\left| \sum_{n=0}^m R_{n-1}(x) \right| = \left| \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n x^n}{1+x} \right| = \frac{|1 - (-x)^{m+1}|}{(1+x)^2} \leq \frac{1 + |x|^{m+1}}{(1+x)^2} \leq 2$.

2.2.5. Notons $T_m = \sum_{n=0}^m R_{n-1} = R_{-1} + \sum_{n=0}^{m-1} R_n$. La suite (T_m) converge simplement sur I_0 vers $R_{-1} + S$ et est dominée par la fonction constante de valeur 2, qui est intégrable sur I_0 . Par le théorème de convergence dominée :

$$\sum_{n=0}^m \int_{I_0} R_{n-1} = \int_{I_0} T_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_{I_0} (R_{-1} + S) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2}.$$

D'après 2.2.2., il en résulte que $\sum r_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = \frac{1}{2}$.

Partie II

1. $\sum_{k=1}^n k u_k = \sum_{k=1}^n k (R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)R_k - \sum_{k=0}^n k R_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n R_n = \sum_{k=0}^n R_k - (n+1)R_n$; par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n-1} R_k - \sum_{k=1}^n k u_k = (n+1)R_n.$$

2. On applique la question précédente avec $u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et on utilise les résultats de I.2.2.3. et I.2.2.5.

$$\sum_{k=1}^n (n-k) \frac{(-1)^{k+1}}{k} = n \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n k u_k = n(\ln 2 - r_n) - \sum_{k=1}^n k u_k = n \ln 2 + r_n - \sum_{k=0}^n r_k = n \ln 2 - \frac{1}{2} + o(1).$$

3.1. D'après 1., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k u_k \leq \sum_{k=0}^n R_k$. Si la série $\sum R_k$ converge, ses sommes partielles sont majorées ; il en est donc de même pour les sommes partielles de la série $\sum k u_k$, et cette dernière est donc aussi convergente.

3.2. $0 \leq (n+1)R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1) u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k u_k$, qui tend vers 0 (reste de série convergente), donc $\lim (n+1) R_n = 0$.

3.3. On sait par 3.1. que, si $\sum R_k$ converge, alors $\sum k u_k$ converge. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité du 1. et en utilisant 3.2., on obtient la réciproque et en même temps l'égalité des sommes en cas de convergence.

4. $k u_k(x) = \frac{1}{k^{x-1}}$. D'après 3.3., $\sum R_n(x)$ converge si et seulement si $x \in]2, +\infty[$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = \zeta(x-1)$.

5.1. Au facteur x près, $\sum k a_k x^k$ est la série entière dérivée de $\sum a_k x^k$, donc son rayon de convergence est aussi ρ ; par conséquent cette série converge absolument pour $x \in]-\rho, \rho[$.

$(n+1) |R_n(x)| = (n+1) \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| |x|^k$, qui tend vers 0 par application de 3.2. à la série à termes positifs $\sum |a_k| |x|^k$. On en déduit que la suite $((n+1)R_n(x))$ converge vers 0.

5.2. D'après la question précédente et l'égalité du 1., $\sum R_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^k = x f'(x)$.

5.3.1. (a_k) est bornée donc $\rho \geq 1$; (a_k) ne tend pas vers 0 donc $\rho \leq 1$. Finalement $\rho = 1$.

5.3.2. $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin \frac{k\pi}{2} x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \cos \frac{k\pi}{2} x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$.

On calcule $f'(x) = \frac{1-x-x^2-x^3}{(1+x^2)^2}$. Selon 5.2., $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x) = \frac{x(1-x-x^2-x^3)}{(1+x^2)^2}$.

FIN DU CORRIGE DU PROBLEME