



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

## MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

*Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-186 du 16.11.99 – BOEN n°42 du 25.11.99.*

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants l'un de l'autre.

## PROBLÈME 1

Étant donné une série convergente  $\sum_{k \geq 0} u_k(x)$ , on note  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$  son reste d'ordre  $n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  et on se propose d'étudier la série  $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$ .

## PARTIE I

I.1. On suppose que  $u_k(x) = (-1)^k x^k$ , où  $x \in \mathbb{R}$ .

I.1.1. Déterminer l'ensemble  $I$  des  $x \in \mathbb{R}$  tels que la série  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k x^k$  converge et préciser sa somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$  pour  $x \in I$ .

I.1.2. En supposant que  $x \in I$ , expliciter  $R_n(x)$ , montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$  converge et calculer sa somme  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$ .

**I.2.** On conserve les notations du **I.1** :

$u_k(x) = (-1)^k x^k$ ,  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k x^k$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et on pose  $R_{-1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$ . On considère par ailleurs la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  et on pose :  $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On se propose d'établir la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} r_n$  et de calculer sa somme.

**I.2.1.** Justifier la convergence de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  et par suite l'existence de  $r_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**I.2.2.** Soit  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  avec  $n \leq m$  et  $I_0 = [0, 1[$ .

**I.2.2.1.** En remarquant que  $\sum_{k=n}^m (-1)^k x^k = R_{n-1}(x) - R_m(x)$ , montrer que pour tout  $x \in I_0$  on a

l'inégalité : 
$$\left| \sum_{k=n}^m (-1)^k x^k \right| \leq 2.$$

**I.2.2.2.** L'entier  $n$  étant fixé, déduire en particulier de **I.2.2.1** que :

$$\int_{I_0} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=n}^m (-1)^k x^k \right) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^m \int_{I_0} (-1)^k x^k dx$$

et par suite que  $r_n = \int_{I_0} R_{n-1}(x) dx$ .

**I.2.2.3.** Retrouver ainsi la valeur (bien connue !) de  $r_0$ .

**I.2.2.4.** Montrer que pour tout couple  $(m, x) \in \mathbb{N} \times I_0$  on a l'inégalité :

$$\left| \sum_{n=0}^m R_{n-1}(x) \right| \leq 2.$$

**I.2.2.5.** Déduire en particulier de **I.2.2.4** que la somme  $\sum_{n=0}^m \int_{I_0} R_{n-1}(x) dx$  admet une limite lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ .

En déduire que la série  $\sum_{n \geq 0} r_n$  converge et calculer sa somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ .

## PARTIE II

### Une égalité sur les restes ; quelques applications.

#### II.1. Egalité sur les restes.

Lorsque la série numérique  $\sum_{k \geq 1} u_k$  converge, on note toujours  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  son reste d'ordre  $n$ .

Soit  $\sum_{k \geq 1} u_k$  une série convergente ; exprimer pour  $n \in \mathbb{N}$  la différence  $\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k$  en fonction de  $n$  et de  $R_n$ .

#### II.2. Application à une suite.

Montrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\sum_{k=1}^n (n-k) \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \alpha n + \beta + o(1)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

#### II.3. Application à une série à termes positifs.

On suppose de plus que  $u_k \geq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

II.3.1. Montrer que la convergence de la série  $\sum_{k \geq 0} R_k$  entraîne la convergence de la série  $\sum_{k \geq 1} k u_k$ .

II.3.2. On suppose que la série  $\sum_{k \geq 1} k u_k$  est convergente. Quelle est la limite de la suite  $(n+1)R_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

II.3.3. Dédurre de ce qui précède que les deux séries  $\sum_{k \geq 0} R_k$  et  $\sum_{k \geq 1} k u_k$  sont de même nature et lorsqu'elles convergent comparer alors leurs sommes  $\sum_{k=0}^{+\infty} R_k$  et  $\sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$ .

#### II.4. Application à la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^x}$ .

On suppose maintenant que  $u_k(x) = \frac{1}{k^x}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in D = ]1, +\infty[$ .

On note toujours  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$  le reste d'ordre  $n$  et on pose  $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$  pour  $x \in D$ .

Préciser l'ensemble  $D_1$  des  $x \in D$  tels que la série  $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$  soit convergente et exprimer,

pour  $x \in D_1$ , la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$  à l'aide de la fonction  $\zeta$ .

### II.5. Application à une série entière.

On suppose maintenant que  $u_k(x) = a_k x^k$ , où  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  désigne une suite de nombres réels et où  $x \in \mathbb{R}$ . On désigne par  $\rho$  le rayon de convergence de cette série entière, on suppose  $\rho > 0$  et on note  $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$  pour  $x \in ]-\rho, \rho[$ .

II.5.1. Soit  $x \in ]-\rho, \rho[$  ; justifier la convergence de la série  $\sum_{k \geq 1} k a_k x^k$  ; en déduire que la suite  $(n+1)R_n(x)$  admet une limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  (et préciser cette limite).

II.5.2. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$  est convergente pour  $x \in ]-\rho, \rho[$  et exprimer sa somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$  à l'aide de  $x$  et de la fonction  $f$ .

II.5.3. Exemple : on suppose que  $a_k = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{k} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

II.5.3.1. Déterminer alors le rayon de convergence  $\rho$  de cette série entière.

II.5.3.2. Expliciter la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$  pour  $x \in ]-\rho, \rho[$  (en justifiant le résultat).