

## Intégrales généralisées et Séries.

\*\*\*

Dans ce problème, pour tout  $\lambda$  réel positif, on note :

$$A(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^\lambda dx$$

- 1.a. Déterminer  $A(0)$  et  $A(1)$ .
- 1.b. Montrer que la fonction  $A$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .
- 1.c. Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier naturel ; montrer que  $A(n+2) = \frac{n+1}{n+2} A(n)$ .
- 1.d. Dédire de ce qui précède que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$A(2p) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

et donner une formule similaire pour  $A(2p+1)$ .

- 2.a. Montrer que pour tout  $n$  entier naturel, vérifiant  $n \geq 2$ , on a :

$$1 \leq \frac{A(n-1)}{A(n)} \leq \frac{A(n-2)}{A(n)} \leq \frac{n}{n-1}.$$

En déduire la limite de  $\frac{A(n-1)}{A(n)}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- 2.b. Montrer que la suite de terme général  $nA(n)A(n-1)$  est constante pour  $n \geq 1$  et déduire des questions précédentes que la suite de terme général  $nA(n)^2$  converge vers  $\frac{\pi}{2}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- 3.a. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , on note  $n = [\lambda]$  sa partie entière. Montrer que  $\frac{A(n+1)}{A(n)} \leq \frac{A(\lambda)}{A(n)} \leq 1$ .

- 3.b. Dédire de ce qui précède que les fonctions  $\lambda \rightarrow A(\lambda)$  et  $\lambda \rightarrow A([\lambda])$  sont équivalentes quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

- 3.c. Dédire un équivalent simple de  $A(\lambda)$  quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

4. Dans cette question on étudie la convergence de  $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2}$ .

- 4.a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $p$ , on a :

$$\frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{p^2}.$$

- 4.c. Dédire des inégalités précédentes la convergence de la série de terme général  $\frac{1}{p^2}$  et un majorant simple de sa somme.

- 4.c. A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour toute fonction  $g$  de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ , il existe un réel  $b$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 g(x) \cdot \sin(2n\pi x) dx \right| \leq \frac{b}{n}.$$

- 4.d. Vérifier que pour tout  $x \in ]0, 1[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$2 \sum_{k=1}^{k=n} \cos(2k\pi x) = \cot(\pi x) \sin(2n\pi x) + \cos(2n\pi x) - 1.$$

- 4.e. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_k = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} \cos(2k\pi x) dx$ .

On considère la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in ]0, 1[$  par  $f(x) = \frac{x(x-1)}{2} \cot(\pi x)$  et on admet que  $f$  se prolonge par continuité en une fonction, toujours notée  $f$ , de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ .

Calculer  $I_k$  et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{k=n} I_k = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \sin(2n\pi x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} \cos(2n\pi x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2} dx.$$

- 4.f. Dédire de l'égalité précédente la valeur de  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

- 5.a. Dans la suite du problème on note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$  et  $\delta_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ .

Montrer, à l'aide d'un développement limité, l'existence d'une suite  $\epsilon_n$  de limite nulle, telle que :

*Mathématiques.elakili* : <http://perso.menara.ma/~abdelakili/>

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \delta_n = \frac{1}{12n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2}.$$

5.b. Dédire de ce qui précède l'existence d'une constante  $K$ , strictement positive, et d'un entier  $n_0$  tels que pour tout  $n$ , vérifiant  $n > n_0$ , on a :  $0 < \delta_n < \frac{K}{n^2}$ .

5.c. Dédire que la série de terme général  $\delta_n$  converge.

5.d. Dédire de ce qui précède que la suite de terme général  $v_n$  converge vers une limite strictement positive.

5.e. Montrer qu'il existe un réel  $k$ , strictement positif, et une suite  $\epsilon_n$  de limite nulle tels que :

$$n! = kn^n e^{-n} \sqrt{n} (1 + \epsilon_n). \text{ (formule de Stirling).}$$

6. Montrer que :  $k = \sqrt{2\pi}$ .