Probléme : Intégrales généralisées.

Pour α réel et n entier strictement positif, on considére les intégrales généralisées :

$$I_{n,a} = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^n}{t^\alpha} dt.$$

Une intégrale généralisée est dite semi-convergente si elle est convergente mais non absolument convergente.

PARTIE : I

On suppose dans cette partie : n = 1.

1.1 Etude de la convergence de : $I_{1,\alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.
1.1.1 $\alpha > 1$ Etudier la convergence absolue de l'intégrale.
1.1.2 $0 < \alpha \leq 1$.

- Montrer que l'intégrale $I_{1,\alpha}$ converge (on pourra utiliser une intégration par partie pour l'étude au voisinage de l'infini).
- On considére la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|sint|}{t^\alpha} dt$.
  Montrer que : $\frac{2}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq |u_n| \leq \frac{2}{n^\alpha \pi^\alpha}$.
- Que peut-on déduire sur la convergence de : $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t^\alpha}| dt$ et $I_{1,\alpha}$?

1.1.3 $\alpha \leq 0$. On considére la suite $v_n = \int_\pi^{n\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.
Etudier la limite de $|v_{n+1} - v_n|$ et en déduire la nature de l'intégrale $I_{1,\alpha}$.
1.2 a et b étant deux réels, on considére l'intégrale :

$$J_{a,b} = \int_0^{+\infty} t^b \sin(t^a) dt.$$

Soit :
D_1 l'ensemble des couples (a, b) tels que $J_{a,b}$ soit absolument convergente,
D_2 l'ensemble des couples (a, b) tels que $J_{a,b}$ soit semi-convergente,
D_3 l'ensemble des couples (a, b) tels que $J_{a,b}$ soit divergente.
A tout couple a, b on associe dans le plan un point M de coordonnées (a, b).
Représenter graphiquement les domaines D_1, D_2, D_3 dans un même systéme d'axes.

PARTIE : II

On suppose dans cette partie : n = 3, $\alpha = 2$.

2.1 Etudier la convergence de $I_{3,2}$.
2.2
2.2.1 Soit $f :]0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) = \frac{\sin t}{t}$.
Etudier le sens de varaition de f.
2.2.2 Soit $F_{a,b}(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} dt$,
Etudier la parité de $F_{a,b}$.
Montrer que la limite de $F_{a,b}(x)$ est $\ln(\frac{a}{b})$ quand x tend vers 0.
2.3 Soit $I(\epsilon) = \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$.
Montrer que $I(\epsilon) = k.F_{1.3}(\epsilon)$ où k est une constante que l'on déterminera.
En déduire la valeur de $I_{3.2}$.

PARTIE : III

On suppose dans cette partie : α = n.

On pose $A_n = I_{n,n} = \int_0^{+\infty} (\frac{\sin t}{t})^n dt$.
On admet que $A_1 = \frac{\pi}{2}$.
3.1 x étant un réel strictement positif, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} dt$.
3.2 Etudier la convergence de l'intégrale A_n pour n supérieur ou égal à 2.
3.3 Calculer A_2.
3.4 Exprimer A_4 en fonction de A_2 et en déduire la valeur de A_4.