Probléme : Réduction, Décompositon de Dunford.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in Sp(f)$ et μ son ordre de multiplicité dans le polynôme minimal Π_f.
On appelle sous-espace caractéristique (ou sous-espace spectral) de f associé à la valeur propre λ et on note $F_\lambda(f)$, le s-ev de E défini par : $F_\lambda(f) = Ker[(f - \lambda Id_E)^\mu]$.

1. Montrer que : $E_\lambda(f) \subset F_\lambda(f)$ et $F_\lambda(f) \neq \{0\}$.
2. Montrer que : $E = \bigoplus_{\lambda \in sp(f)} F_\lambda(f)$.
3. Supposons que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, soit ω l'ordre de multiplicité de λ dans χ_f.
   - Montrer que $F_\lambda(f)$ est stable par f et que si f_λ désigne l'endomorphisme induit par f sur F_λ alors : $f_\lambda - \lambda Id_{F_\lambda}$ est nilpotent d'indice μ.
   - Montrer que : $\dim(F_\lambda(f)) = \omega$.
   - En notant, pour tout q dans $\mathbb{N}$, $N_q = Ker[(f - \lambda Id)^q]$, montrer que : $\{0\} = N_0 \nsubseteq N_1 \nsubseteq ... \nsubseteq N_\mu = N_{\mu+1} = ... = F_\lambda(f)$.
   - Montrer que f est diagonalisable ssi : $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $rg(f - \alpha Id_E) = rg[(f - \alpha Id_E)^2]$.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$.
   - Montrer qu'il existe un unique couple (d, ν) de $(\mathcal{L}(E))^2$ tel que : $f = d + \nu$, d diagonalisable, ν nilpotent et $d \circ \nu = \nu \circ d$.
   - Montrer que d et ν sont des polynômes en f.
     Le couple (d, ν) ou la relation $f = d + \nu$ s'appelle la décomposition de Dunford.
   - Donner une intérprétation matricielle de la décomposition de Dunford.
5. En notant : $Sp(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_2\}$ montrer qu'il existe une base B de E telle que la matrice de f dans B soit de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} \quad \text{avec } A_i \text{ est triangulaire supérieure de la forme : } \begin{pmatrix} \lambda_i & & \times \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$