

PROBLÈME

Partie I.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ est divergente.

On désigne par f la somme de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, $x \in]-1, 1[$.

1) a) Soit $A > 0$. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n=1}^{N_1} a_n \geq 2A$.

b) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $0 \leq 1 - x \leq \alpha$ entraîne $\sum_{n=1}^{N_1} a_n x^n \geq A$.

c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

2) Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$.

a) Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 1} b_n x^n$ a pour rayon de convergence 1. On désigne par $g(x)$ sa somme.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geq N_2$, $\left| \frac{b_n}{a_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$. En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$, on a

$$|g(x) - f(x)| \leq M \sum_{n=1}^{N_2} a_n x^n + \varepsilon f(x).$$

avec $M = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{b_n}{a_n} - 1 \right|$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Partie II.

Application 1. Déterminer un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^n$ quand x tend vers 1.

En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Application 2. a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ et préciser

sa nature aux points $x = R$ et $x = -R$. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, $x \in]-R, R[$.

b) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} x^n.$$

Dans la suite on admet qu'on a

$$\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

c) Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.