PROBLÈME

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la suite de fonctions $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(1 - e^{-x/n}\right).$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On désigne par f sa somme.
2) En utilisant le critère de Cauchy montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.
3) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$.
En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
4) Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et calculer $f'(0)$.
5) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x > 0$, on pose $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{x}$.
a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} g_n(x)$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.
(Indication: Utiliser l'inégalité: $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t, \ \forall t \geq 0$).
b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
6) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a

$$0 \leq f(x) \leq x.$$

7) Soit $x \in [0, +\infty[$. Montrer que pour tout entier $N \geq x$, on a

$$\sum_{n=N}^{+\infty} f_n'(x) \geq \frac{1}{eN}.$$

En déduire que $f'(x) \geq \dfrac{1}{e(x+1)}$ et parsuite

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) \geq \frac{1}{e}\ln(1+x).$$

8) Donner l'allure du graphe de la fonction f.