

PROBLÈME

Soit $\alpha > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad u_n = \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}, \quad n \geq 1.$$

1) On pose $v_n = \ln u_n - \ln u_{n+1}$. Montrer que $v_n \geq 0$ et que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente.

Que peut-on dire sur la limite de la suite $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$?

2) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

4) Dans cette question on suppose que $\alpha > 1$.

a) Montrer que la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang. En déduire qu'elle est convergente. On pose $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$. Montrer que $l = 0$.

Indication: Raisonner par l'absurde et utiliser un théorème de comparaison.

b) En partant de l'égalité $(n+1)u_{n+1} - nu_n = u_n - \alpha u_{n+1}$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{\alpha-1}$.

5) Montrer que la série de terme général $x_n = v_n - \frac{\alpha}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ est convergente.

6) a) Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \ln u_0 - \ln u_n - \alpha \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

b) En déduire que la suite $(n^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Indication: Utiliser la constante d'Euler $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

c) Retrouver le résultat de la question 3.