PROBLEME

On se propose de calculer les intégrales I et J données respectivement par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

1. Montrer que les intégrales I et J sont convergentes et établir une relation simple entre elles.

2. Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Calculer la somme $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos 2kx$. En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin x} dx$.

3. Soient a et b deux réels avec $a < b$ et soit φ une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. En utilisant une intégration par parties et des majorations simples convenables, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi(x) \sin nx \, dx = 0$$

4. Montrer que la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \quad \text{pour } x \in]0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0$$

est de classe C^1 sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

5. Àl'aide de tout ce qui précède, montrer que l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

et en déduire la valeur des intégrales I et J.