Mathématiques.elakili : http ://perso.menara.ma/~abdelakili/

Réduction des endomorphismes.(CCP MP 1984)

⋆⋆⋆

N.B. - La partie III n'utilise que les résultats de la partie I et n'intervient pas dans la partie IV.

Notations

1) Dans tout le problème,$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E,I_E l'élément de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\forall x \in E, I_E(x) = x$ et $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties de E cad $\mathcal{H} = \{\lambda.I_E ; \lambda \in \mathbb{K}\}$
2) Pour un endomorphisme u de E, on note :
   - $u^0 = I_E$ et $u^p = u \circ u^{p-1}$ pour tout entier $p \geqslant 1$
   - $C(u)$ (appelé commutant de u) la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes v de E commutants avec u cad tels que $u \circ v = v \circ u$.
   - $\boldsymbol{\pi_u}$ **le polynôme caractéristique de** u.
   - pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k X^k$, $P(u)$ désigne l'endomorphisme de E défini par $P(u) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k u^k$ (on notera que $P(u)$ est un élément de $C(u)$)
   - pour tout vecteur x de E, $E_u(x)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $\{u^p(x) ; p \in \mathbb{N}\}$.
   - un endomorphisme u de E est dit cyclique s'il existe un vecteur x de E tel que $E_u(x) = E$
3) Si $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$, on note : $C(\mathcal{A}) = \{v \in L(E) / \ \forall u \in \mathcal{A},\ v \circ u = u \circ v\}$
   Enfin, pour une matrice A de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ A.B = B.A\}$ (appelé commutant de la matrice A)

Les candidats pourront admettre et utiliser les résultats suivants :

1) Soit $\mathcal{B}$ une base de E ; pour un endomorphisme u de E, soit $M(u, \mathcal{B})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
   Alors, un endomorphisme v appartient au commutant de u si et seulement si $M(v, \mathcal{B})$ appartient au commutant de $M(u, \mathcal{B})$ et l'application $v \to M(v, \mathcal{B})$ est un isomorphisme entre ces 2 algèbres.
2) Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$; le déterminant : $V(\lambda_1, .., \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ | & | & | & | & | \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$ est nul si et seulement s'il existe un couple (i, j) tel que : $\lambda_i = \lambda_j, 1 \leqslant i \leqslant n ; 1 \leqslant j \leqslant n ; i \neq j$

Partie I

1) Soit x un vecteur de E et u un endomorphisme de E.
   a) Montrer que $E_u(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, contenant x et stable par u.
   b) Soit $x \neq 0$; on pose $dimE_u(x) = k$. Montrer que $k \geqslant 1$ et que $\{u^i(x) ; 0 \leqslant i \leqslant k-1\}$ est une base de $E_u(x)$
   c) Caractériser au moyen de la dimension de $E_u(x)$ les vecteurs propres de u
2) On suppose que u est un endomorphisme cyclique. Soit alors $x_0 \in E$ tel que $\{u^i(x_0) ; 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ soit une base de E.
   a) Montrer que $\{u^i ; 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ est une partie libre de $\mathcal{L}(E)$
   b) Soit v et w deux éléments de $C(u)$. Montrer que $v = w$ si et seulement si $v(x_0) = w(x_0)$
   c) Montrer que $\{u^i ; 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ est une base de $C(u)$
   d) On pose $u^n(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$ où $a_k \in \mathbb{K}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
      - Calculer le polynôme caractéristique π_u de u à l'aide des coefficients $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$
      - En déduire que $\pi_u(u) = 0$

Mathématiques.elakili : http ://perso.menara.ma/∼abdelakili/

3) Dans cette question u est un endomorphisme quelconque de E
   a) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et soit v l'endomorphisme de F induit par u. Montrer que π_v divise π_u. En déduire que $Ker\pi_v(u)$ est inclus dans $Ker\pi_u(u)$
   b) Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer que u induit sur le sous-espace $E_u(x)$ un endomorphisme cyclique de $E_u(x)$. En déduire que $\pi_u(u)(x) = 0$
   c) Montrer que $\pi_u(u)$ est l'endomorphisme nul.
4) a) Soit u un endomorphismede E tel que $\forall x \in E, dimE_u(x) \leqslant 1$. Montrer que u est une homothétie de E.
   b) *Application* : Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$ satisfaisant la propriété : $\forall x \in E, x \neq 0, \exists f \in \mathcal{A} \exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $Ker(f - \alpha I_E) = \mathbb{K}.x$ (où $\mathbb{K}.x$ désigne la droite vectorielle engendrée par x). Montrer que $C(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$
   c) En déduire que $C(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ dans les 2 cas suivants :
      (i) $\mathcal{A} = GL(E)$
      (ii) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; E est un espace euclidien et $\mathcal{A}$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Partie II

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E, $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ les valeurs propres distinctes de u dans $\mathbb{K}$ et $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ leur ordre de multiplicité.

1) On suppose que $p = n$. Montrer que u est cyclique.
2) Dans cette question, on suppose que u est diagonalisable.
   a) Montrer que v appartient à $C(u)$ si et seulement si v laisse stable tous les sous-espaces propres de u
   b) En déduire que $dimC(u) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2$
   c) Montrer que $(u - \lambda_1 I_E) \circ (u - \lambda_2 I_E) \circ .. \circ (u - \lambda_p I_E) = 0$. En déduire que si $(I_E, u, .., u^{n-1})$ est une famille libre, u a n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ 2 à 2 distinctes.
   d) Déduire des résultats précédents que les propriétés suivantes sont équivalentes :
      (i) u est cyclique
      (ii) $\{I_E, u, .., u^{n-1}\}$ est une famille libre
      (iii) u admet n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ 2 à 2 distinctes ;
      (iv) $dimC(u) = n$
3) Dans cette question, on suppose u cyclique.
   a) Monter, en utilisant une base convenable, que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $rang(u - \lambda I_E) \geqslant n - 1$
   b) En déduire que u est diagonalisable si et seulement si u admet n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ 2 à 2 distinctes.
4) *Application* (cette question n'utilise que les résultats de 2)b)). Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre k $(k \geqslant 2)$ $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ telles que

$$\forall i = 1, .., k \quad \forall j = 1, .., k \quad \sum_{i=1}^{k} a_{ij} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}$$

   (on note $\alpha(A)$ la valeur commune des sommes ci-dessus).
   Soit J l'élément de $\mathcal{M}$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
   a) Montrer que $\mathcal{M}$ est le commutant de J et que α est une forme linéaire sur $\mathcal{M}$
   b) Déterminer les ordres de multiplicité des valeurs propres de J. Donner $dim\mathcal{M}$
   c) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathcal{M}$. On pose $\beta(A) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$. Montrer que $M_0 = \{A \in \mathcal{M} \ / \ \alpha(A) = \beta(A)\}$ est un espace vectoriel et calculer sa dimension

Mathématiques.elakili : http ://perso.menara.ma/∼abdelakili/

Partie III

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice p ($p \geqslant 2$) cad tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$

1) a) Montrer que pour tout vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, la famille de vecteurs $\{u^i(x); 0 \leqslant i \leqslant p-1\}$est une partie libre de E.
   b) En déduire que p est inférieur ou égal à n et que u est cyclique si et seulement si $p = n$
2) *Application* : pour tout entier $k \geqslant 0$ on désigne par $\mathbb{R}_k[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à k.
   Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ défini (pour $k \geqslant 1$) par :
$$\forall P \in \mathbb{R}_k[X] \;\; \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$
   a) Déterminer $Ker\Delta$. En déduire que $Im\Delta = \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Montrer que Δ est cyclique.
   b) Soit D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'
   Montrer que D est un élément de $C(\Delta)$
   c) La question (I.2.c)) permet de définir des réels $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ tels que $D = \sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta^i$ et ce de façon unique.
   Déterminer ces réels lorsque $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.

Partie IV

Dans toute cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $dimE = 2$. On désignera par $\mathcal{P}$ un espace affine réel de dimension 2 associé à l'espace vectoriel E.

A. Soit u un endomorphisme de E satisfaisant :$u^p = I_E$ avec $p > 2$ et $u^q \neq I_E$ pour $1 \leqslant q \leqslant p-1$
   1) u peut-il être une homothétie ? Montrer que u est cyclique
   2) a) Montrer que le reste de la division euclidienne du polynôme $X^p - 1$ par le polynôme caractéristique π_u de u est nul (on pourra utiliser les résultats de I.3))
      b) En déduire que les racines du polynôme π_u sont : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ où θ est un élément de l'ensemble $\{\dfrac{2k\pi}{p}; 1 \leqslant k \leqslant p-1; k \wedge p = 1\}$
   3) Soit e_1 un vecteur non nul de E et $e_2 = u(e_1)$
      (i) Montrer que (e_1, e_2) est une base de E et que la matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ (θ défini en 2))
      (ii) Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique unique φ sur E satisfaisant :
      $\begin{cases} \varphi(e_1, e_1) = 1 \\ \varphi(u(x), u(y) = \varphi(x, y) \; \forall (x, y) \in E^2 \end{cases}$ Donner la matrice de φ dans la base (e_1, e_2)
      (iii) Montrer que φ est un produit scalaire sur E. Quelle est l'interprétation de u dans cette structure euclidienne ?

B. Soit f une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ satisfaisant la propriété suivante :
   $\exists (A_1, .., A_p) \in \mathcal{P}^p$, ($p > 2$), avec $A_2, .., A_p$ distincts de A_1 tels que : $f(A_i) = A_{i+1}$ pour $i = 1..(p-1)$ et $f(A_p) = A_1$
   1) (i) Montrer que les points $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont 2 à 2 distincts
      (ii) Montrer que f a au moins un point fixe
      (iii) Montrer que $f^p = I_E$ et que l'application linéaire associée à f, notée u, satisfait les conditions définies en tête de A.
      (iv) Montrer que f a un point fixe unique G
   a) Montrer que les points $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ appartiennent à une ellipse de $\mathcal{P}$, de centre G et globalement invariante par f