Corrigé : Réduction des endomorphismes.

Partie I

1) En développant par rapport à la première ligne on trouve $\det C_P = \pm a_0$, d'où le résultat.

2) Le plus rapide est de développer par rapport à la dernière colonne, on trouve alors

$$\chi_{C_P}(X) = (-a_{n-1} - X)\begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -X & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & -X \end{vmatrix} + a_{n-2}\begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -X & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & -X & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{vmatrix} - \dots$$

et on reconnaît $(-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0) = (-1)^n P(X)$.

Donc $k = (-1)^n$.

3) Il faut et il suffit que le terme dominant de Q soit $(-1)^n X^n$.

4)a) Les valeurs propres sont les racines de χ qui se calcule par un déterminant; or le déterminant est invariant par transposition.

4)b) on a ${}^tC_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$; si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}$ il vient le système

$$\begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 & - \dots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_i = \lambda^{i-1}x_1 \ \forall i = 1 \dots n \\ (-a_0 - a_1\lambda - \dots - a_{n-1}\lambda^{n-1})x_1 \quad = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

Donc x_1 ne peut être nul (un vecteur propre n'est pas nul), λ est racine de P et tout vecteur propre est multiple de $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \ddots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$

4c) On vient de constater que les espaces propres sont tous limités à des droites; la matrice ${}^tC_P$ n'est donc diagonalisable que s'il y a assez de telles droites pour engendrer l'espace entier, c'est à dire si P a n racines distinctes (et donc simples).

La réciproque est du cours (puisque $P = \pm\chi_{{}^tC_P}$).

4d)) Si P est scindé à racines simples, comme on vient de le voir une matrice de passage qui diagonalise ${}^tC_P$ est $V = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \ddots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, qui est inversible puisque matrice de passage ! Bien sûr son déterminant est assez connu.

Remarque: à ce stade on pourrait diagonaliser aussi bien la matrice C_P, car de $V^{-1t}C_PV = \Delta$ on déduit ${}^tVC_PV^{-1} = \Delta$. **5a)** Vu le contexte, on va chercher à écrire une matrice C_P où $P(X) = X^{2002} - X^{2001} - X^{2000} - 1999I_{2002}$. En particulier $n = 2002$.

Une telle matrice conviendra par le théorème de Cayley-Hamilton.

On prend donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1999 \\ 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ & & & \\ 0 & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5b) Attention au piège: bien sûr que C_{X^n} conviendrait, mais ce n'est pas ce que l'on demande !

On commence par utiliser l'hypothèse: on prend un vecteur e_1 tel que $f^{n-1}(e_1)$ soit non nul, et on applique f: $f(e_1) = e_2, \dots, f^k(e_1) = e_{k+1}$.

la famille ainsi construite $(e_1, \dots, e_n)$ est une base.

Pour le prouver, on vérifie qu'elle est libre (et son cardinal est n):

supposant que $\alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n = 0$, on a en appliquant f^{n-1} et par linéarité $\alpha_1 f^{n-1}(e_1) + 0 + \dots + 0 = 0$, d'où $\alpha_1 = 0$.

On recommence de proche en proche, en appliquant cette fois f^{n-2} pour annuler α_2, etc.

Finalement la combinaison linéaire est triviale et la famille est libre.

Dans cette base, on a bien

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie II

6) Par hypothèse, on a pour tout $i = 1 \dots n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.|x_j| \leq r_i \|X\|_\infty$$

7) Soit i un indice tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$, dans les conditions de la question précédente.

On a alors $|\lambda| \leq r_i$, c'est à dire $\lambda \in D_i$.

Ceci est vrai pour n'importe quelle valeur propre, qui appartiendra donc à l'un des disques D_i. Au total,

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{k=1}^{n} D_k$$

(qui d'ailleurs n'est autre que le plus grand des n disques).

8) les racines de P sont les valeurs propres de sa matrice compagne C_P. Or

$$r_1 = |a_0| \quad r_2 = 1 + |a_1| \quad \dots \quad r_n = 1 + |a_n|$$

comme on le lit sur la matrice C_P. En appliquant la question précédente, on en déduit que toutes les racines de P sont dans le disque $D_R = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$ où $R = \max r_k$.

9) Une application amusante !

Supposons pour fixer les idées que a soit le plus grand des quatre entiers a, b, c, d (on a forcément alors c ou $d > b$, mais peu importe). Posons

$$P(X) = X^a + X^b - X^c - X^d$$

La matrice C_P ne contient que des $0, \pm 1$ et on a avec les notations de la question précédente $R = 2$.

Les seules racines entières possibles sont donc $0, 1, 2$.

Reste à exclure le dernier cas: or si 2 est racine, on a (avec par exemple $c > d$)

$$2^b(1 + 2^{a-b}) = 2^d(1 + 2^{c-d})$$

ce qui ne serait possible qu'avec $b = d$ contrairement à l'hypothèse, par unicité de la décomposition en facteurs premiers puisque les contenus des parenthèses sont impairs (ou par le théorème de Gauss si vous y tenez).

Donc les seules racines dans $\mathbb{N}$ de $n^a + n^b = n^c + n^d$ sont 0 et 1.

Partie III

10) Remplaçons $u(n)$ par λ^n: on a bien $\lambda^{n+p} + a_{p-1}\lambda^{n+p-1} + \ldots + a_0\lambda^n = 0$ dès que $P(\lambda) = 0$. Cqfd (la réciproque est fausse, par exemple quand $a_0 = \lambda = 0$).

11) Tout d'abord, φ est linéaire (ses composantes sont des formes linéaires).

Ensuite, c'est une bijection, car chacune des suites élément de F est uniquement et entièrement déterminée par des p premières valeurs, compte tenu de la relation de récurrence.

Donc F, isomorphe à $\mathbb{C}^p$, est de dimension p.

12a) $e_i(p) = -a_{p-1}e_i(p-1) - \ldots - a_0 e_i(0) = -a_i$.

12b) Les e_i sont l'image de la base canonique de $\mathbb{C}^p$ par l'isomorphisme φ^{-1}.

12c) La suite u et la suite $\sum\limits_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$ sont deux éléments de F qui commencent par les p mêmes termes, à savoir $\varphi(u) = (u(0), u(1), \ldots, u(p-1))$.

Elles sont donc identiques: les termes ultérieurs suivent par récurrence.

Remarque : l'application φ évoque le cours sur les bases duales. . .

13) $f(u + \lambda v)$ est par définition la suite de terme général

$$(u + \lambda v)(n + 1) = u(n + 1) + \lambda v(n + 1)$$

C'est donc $f(u) + \lambda f(v)$ ce qui prouve la linéarité de f: ainsi $f \in \mathcal{L}(E)$.

Enfin, la relation de récurrence qui définit F devant être vraie pour tout n sera vraie pour tout $n + 1$! (la réciproque n'est PAS vraie. . .) ce qui signifie que $f(F) \subset F$, *ie* que F est stable par F.

14) Cela résulte de **12a)**: en effet, $e_i(p) = -a_i$ et donc

$$f(e_i) = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, -a_i, \ldots) \quad \text{et} \quad \varphi(f(e_i)) = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, -a_i)$$

En écrivant ceci en colonnes pour $i = 0 \ldots p-1$, on obtient la matrice de f dans la base (e_i) et on reconnaît ${}^tC_P$.

15a) D'après **4c)**, ${}^tC_P$ est diagonalisable et une base de vecteurs propres est donnée par les colonnes de $V = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_0 & \ldots & \lambda_{p-1} \\ \ddots & & \\ \lambda_1^{p-1} & \ldots & \lambda_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}$.

15b) Tout élément de F s'écrit dans cette base qui est constituée de suites géométriques (cf. **10**) autrement dit cela ne s'arrête pas à l'exposant $p-1$, mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u(n) = k_0\lambda_0^n + \ldots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^{p-1}$$

où les k_i sont tout simplement les coordonnées de u dans la base (e_i).

16) Les racines de $P(X) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + bc + ca)X - abc$ sont a, b et c.

Ces réels étant supposés distincts, tout est fini: une base de l'espace F est constituée par les trois suites géométriques $(a^n), (b^n), (c^n)$ et tout élément de F s'écrit

$$u_n = \alpha a^n + \beta b^n + \gamma c^n$$

où α, β, γ sont fonction des valeurs initiales u_0, u_1, u_2 (la matrice de passage entre ces paramètres étant de la forme V, cf. supra).

Partie IV

Notons que par la première partie, $\chi_A = \chi_{C_A} = (-1)^n P$.

17 Hé non: on peut s'inspirer du **5b)**, la matrice $C_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$
convient avec $A = 0$, matrice nulle ! Alors que C_A est de rang $n-1$.

18) Supposons $(**)$, c'est à dire que (U, C_U) et (V, C_V) sont simultanément semblables: comme le rang est invariant par changement de base, on a

$$\mathrm{rg}(U - V) = \mathrm{rg}(C_U - C_V) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & \dots & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \bullet \end{pmatrix}$$

Cette matrice ne peut être nulle: on aurait $\mathrm{rg}(U - V) = 0$ et donc $U = V$ ce qui est exclu. Donc elle est de rang 1, ce qui prouve $(*)$.

19)

Prenons $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $C_U = C_V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ car $\chi_U = \chi_V = (X-1)^2$. Néanmoins $U = I_2$ n'est clairement pas semblable à C_U, alors que V est semblable à C_V.

Comme les polynômes caractéristiques ont été choisis égaux, leur pgcd est leur valeur commune $(X-1)^2$.

20) Par le théorème du rang, H est un hyperplan.

21a)

Si $F \subset H$ on aurait $u_F = v_F$ et donc $\chi_{u_F} = \chi_{v_F}$. Mais $\chi_{u_F} | \chi_u$ et $\chi_{v_F} | \chi_v$, on aurait donc un diviseur commun non trivial contrairement à l'hypothèse que ces deux polynômes sont premiers entre eux.

Donc $F \not\subset H$.

21b) Soit $x \in F \setminus H$: alors H et x engendrent E puisque H est un hyperplan et $x \notin H$. Cela signifie que $F + H = E$ (mais pas $F \oplus H = E$!).

Il n'y a pas de théorème du cours qui permette de conclure immédiatement, même si cela paraît clair. On peut par exemple

- Utiliser deux fois le théorème de la base incomplète en partant d'une base de $F \cap H$ que l'on complètera dans F, puis dans H.

- Considérer les familles libres maximales de la forme $(B_F, h_1, \dots, h_k)$ où B_F est une base donnée de F et les h_i appartiennent à H. On vérifie qu'une telle famille engendre F et H (par maximalité), et donc c'est une base de E.

- Il y a d'autres façons de faire !

On a donc par blocs

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 0 & \widetilde{U} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}(v) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 0 & \widetilde{V} \end{pmatrix}$$

où les sous-matrices $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ coïncident, puisque u et v agissent de la même façon sur H ! (en fait, même les sous-matrices *au dessus* de celles-ci sont égales).

Donc $\chi_{\widetilde{U}} = \chi_{\widetilde{V}}$ est un diviseur commun de χ_U et χ_V, contrairement à l'hypothèse qu'ils sont premiers entre eux.

21c) Finalement les seuls sous-espaces stables à la fois par u et v sont E entier et $\{0\}$.

22a) u^j est, comme u, un automorphisme, qui conserve la dimension: donc $G_j = u^{-j}(H)$ est, comme H, un hyperplan.

22b) On a $\dim G_0 = \dim H = n-1, \dim G_0 \cap G_1 \geq n-2, \ldots \dim G_0 \cap \ldots \cap G_{n-2} \geq n-1$ en vertu du

Lemme. Si H' est un hyperplan et F un sev, on a $\dim(F \cap H') \geq \dim F - 1$.

Démonstration du lemme: soit Δ une droite supplémentaire de H'. Alors $F = F \cap H' \oplus F \cap \Delta$, et $F \cap \Delta$ est au plus une droite, cqfd.

22c) Un tel y existe d'après la question précédente.

La famille $\mathcal{F} = \{y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\}$ ne peut être libre pour toute valeur de p (au maximum elle peut avoir n éléments !), soit donc p maximal tel que la famille $\mathcal{F}$ soit libre, cette famille est une base de l'espace F qu'elle engendre.

Nous voulons montrer que $F = E$ c'est à dre que $p = n$.

- D'abord notons que $e_0, e_1, \ldots, e_{n-2} \in H$ par définition même de y. Raisonnons dorénavant par l'absurde: si $p < n$, on a donc $F \subset H$.
- De plus F est stable par u car l'image par u de la base $\mathcal{F}$ est encore dans F: en particulier, $u(e_{p-1})$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ par maximalité de p.
- Enfin et triomphalement, pour tout $x \in F$ on a $v(x) = u(x) \in F$ puisque $F \subset H$ et $v_F = u_F$. Donc F est stable par v lui aussi.

Nous sommes arrivés à une impossibilité d'après **21c)**. Donc $F = E, p = n$ et $B'' = \mathcal{F}$ est une base de E.

22d) Utilisons Cayley-Hamilton: $\chi_u(u)(y) = 0 = (-1)^n(u^n(y) + a_{n-1}u^{n-1}(y) + \ldots + a_0 y)$ et donc

- $u(e_k) = u^k(y)$ pour $k < n-1$
- $u(e_{n-1}) = u(u^{n-1}(y)) = u^n(y) = -a_0 y - \ldots - a_{n-1}u^{n-1}(y) = -a_0 e_0 - \ldots - a_{n-1}e_{n-1}$.

Ce qui signifie que la matrice de u est bien C_u dans la base $B'' = \mathcal{F}$. De même pour v pour les $n-1$ premières colonnes, la dernière est alors obligatoirement constituée des coefficients de χ_v par **2**.

22e) Récapitulons: on a montré que le changement de base vers $\mathcal{F}$ change U (resp. V) en C_U (resp. C_V). Nous avons donc montré $(**)$.

23) Une application amusante encore !

D'abord notons que χ_U et χ_V sont effectivement premiers entre eux (leur différence est une constante – non nulle). Donc ce qui précède s'applique. Dans une base B'' bien choisie, on a les matrices de ces endomorphismes qui sont

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & +1 \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Considérons l'ensemble réunion de B'' et de son opposée:

$$X = (e_0, \dots, e_{n-1}, -e_0, \dots, -e_{n-1})$$

$*$ Cet ensemble a $2n$ éléments, u et v agissent sur X. Par exemple, u envoie $-e_{n-1}$ sur e_1.

$*$ Tout composé de u et v agit donc sur X, et le groupe G engendré par u et v agit sur X.

$*$ Réciproquement, tout élément de G est déterminé par son action sur X: en effet X contient une base, et tout endomorphisme est déterminé par l'image d'une base.

$*$ Le morphisme de G dans $\mathfrak{S}_X$, ensemble des permutations de X, qui définit l'action de G sur X est donc injectif, ce qui suffit à prouver que le cardinal de G est inférieur ou égal à celui de $\mathfrak{S}_X$, soit $(2n)!$, cqfd.

Remarque: il est facile de constater que l'action de u et v ne peut que permuter les vecteurs de X en changeant éventuellement leurs signes. On tombe donc dans un groupe plus petit, défini par des couples constitués d'une permutation des n indices et de n choix de signes, ce qui fait $2^n n!$ choix possibles seulement. Matriciellement il s'agit des matrices qui possèdent par ligne et par colonne un seul terme non nul, qui vaut 1 ou -1.