

Réduction des endomorphismes.(E3A MP 2002)

Problème

Préliminaires (définitions et rappels).

- Dans tout le problème E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes. On note n sa dimension et on suppose $n \geq 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ son algèbre d'endomorphismes.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si \mathcal{B} est une base de E , on note $Mat(u, \mathcal{B})$ la matrice de u sur la base \mathcal{B} .
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout entier naturel p non nul. on note $u^p = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{p \text{ fois}}$. On pose $u^0 = Id$.
- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$; on notera $P(u)$ l'application linéaire définie par :

$$\forall q \in \mathbb{N}, P(u) = \sum_{0 \leq k \leq q} a_k u^k \text{ si } P(X) = \sum_{0 \leq k \leq q} a_k X^k.$$

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *commutant de u* l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ des endomorphismes qui commutent avec u ; on a :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}.$$

On rappelle que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

- On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si il existe un entier naturel non nul p tel que $u^p = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier p vérifiant $u^p = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de u .
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans le corps des nombres complexes \mathbb{C} .

Partie 0. Un exemple.

Dans cette partie, on considère la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : M est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les n entiers consécutifs $1, 2, \dots, n$. Ainsi, on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{C}(M)$ le sous-espace vectoriel formé par les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec M .

1. Démontrer que $\mathcal{C}(M)$ est l'ensemble des matrices diagonales.
2. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(M)$.

Dans toute la suite du problème, u désigne un endomorphisme de E .

Partie I. Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de u , on note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé :

$$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id).$$

Dans cette partie, on suppose l'endomorphisme u diagonalisable.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ ses valeurs propres. On a :

$$E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{\lambda_i}(u).$$

On pose $n_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leq i \leq p$.

Soit \mathcal{B} une base de E . On rappelle que la base \mathcal{B} est dite adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{\lambda_i}(u)$ s'il existe pour chaque entier i compris entre 1 et p , une base $(e_1^i, \dots, e_{n_i}^i)$ du sous-espace vectoriel $E_{\lambda_i}(u)$ telle que $\mathcal{B} = (e_1^1, \dots, e_{n_1}^1, e_1^2, \dots, e_{n_2}^2, \dots, e_1^p, \dots, e_{n_p}^p)$.

1. Montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$ alors les sous-espaces $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v .
2. Pour tout entier i compris entre 1 et p , on note u_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par u . Que peut-on dire de u_i ?
3. En déduire que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si, sur une base \mathcal{B} adaptée à la somme directe $E =$

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{\lambda_i}(u) :$$

$$Mat(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & V_p \end{pmatrix}$$

avec $V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ pour $1 \leq i \leq p$.

4. Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{1 \leq i \leq p} n_i^2$.
5. Montrer que si u est diagonalisable, alors $\dim \mathcal{C}(u) \geq n$.
6. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $\dim \mathcal{C}(u) = n$.

Partie II. Commutant d'un endomorphisme nilpotent d'indice 2.

On suppose dans cette partie que u est nilpotent d'indice 2 et que $n \geq 2$. On note r le rang de u . On pose $s = n - 2r$.

1. Montrer que $\text{Im } u \subset \ker u$. En déduire que $r \leq \frac{n}{2}$.
2. Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans E muni de la base $(e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$, montrer que la famille $(u(e'_1), u(e'_2), \dots, u(e'_r))$ est une base de $\text{Im } u$.
3. En utilisant un sous-espace vectoriel H de E tel que $\ker u = \text{Im } u \oplus H$, montrer qu'il existe une base \mathcal{B}' de E telle que :

$$Mat(u, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow r \\ \uparrow s \\ \uparrow r \end{matrix}$$

I_r désigne la matrice identité d'ordre r .

4. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$; la matrice de v dans la base \mathcal{B}' est définie par blocs en posant :

$$Mat(v, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow r \\ \uparrow s \\ \uparrow r \end{matrix}$$

Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si

$$\begin{cases} A_4 = 0_{s,r} \\ A_7 = 0_{r,r} \\ A_8 = 0_{r,s} \\ A_9 = A_1 \end{cases} \quad 0_{p,q} \text{ désignant la matrice nulle à } p \text{ lignes et } q \text{ colonnes.}$$

5. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(u)$ en fonction de n et de r . Montrer que : $\dim \mathcal{C}(u) \geq \frac{n^2}{2}$.

Partie III. Commutant d'un endomorphisme u vérifiant la relation (1) :

$$(1) \quad (u - Id) \circ (u - 2Id)^2 = 0.$$

Id désigne l'application identique de E . On rappelle que :

$$(u - 2Id)^2 = (u - 2Id) \circ (u - 2Id).$$

On pose $E_1 = \ker(u - Id)$ et $E_2 = \ker(u - 2Id)^2$, $n_1 = \dim E_1$ et $n_2 = \dim E_2$; on suppose de plus $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$ et $n \geq 2$.

1. Montrer en rappelant le théorème utilisé que :

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

On note p_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et p_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 .

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)(X-2)^2}.$$

En déduire deux polynômes U et V tels que :

$$1 = U(X)(X-1) + V(X)(X-2)^2, \deg U < 2 \text{ et } \deg V < 1.$$

3. Montrer que $p_1 = V(u) \circ (u - 2Id)^2$ et $p_2 = U(u) \circ (u - Id)$.
 4. On note $d = p_1 + 2p_2$; montrer que d est diagonalisable.
 5. Soit $w = u - d$. Calculer w^2 , en déduire que $w = 0$ ou w est nilpotent d'indice 2.
 6. Détermination de $\dim \mathcal{C}(u)$.

(a) Montrer que : $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si $v \in \mathcal{C}(d)$ et $v \in \mathcal{C}(w)$.

(b) Déterminer les restrictions de w à E_1 et E_2 respectivement. En déduire qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$Mat(w, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n_1 \\ \uparrow n_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \leftarrow \vec{n}_1 \\ \leftarrow \vec{n}_2 \end{matrix}$$

où N est la matrice de l'endomorphisme induit par $(u - 2Id)$ sur E_2 sur une base de E_2 .

(c) Montrer que le rang de la matrice N est égal à $n_2 - \dim(\ker(u - 2Id))$.

(d) Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si

$$Mat(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n_1 \\ \uparrow n_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \leftarrow \vec{n}_1 \\ \leftarrow \vec{n}_2 \end{matrix}$$

et

$$V_2 N = N V_2.$$

(e) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $N = 0$.

(f) On suppose u non diagonalisable. déterminer $\dim \mathcal{C}(U)$ en fonction de n_1 , n_2 et $\dim(\ker(u - 2Id))$.