

Feuille d'exercices (Espaces vectoriels normés)

Exercice 1. Soit $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, définie par $N(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$.

- 1) Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .
- 2) On pose $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / N(x, y) \leq 1\}$. Montrer que

$$(x, y) \in E \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq x + y \leq 1 \end{cases}$$

Représenter graphiquement E .

Exercice 2. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel formé des suites réelles bornées.

Pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, on pose $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

- 1) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .

2) Soit $F = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} / \sum_{n \geq 0} |x_n| \text{ converge} \right\}$.

- a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

b) Pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, on pose $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur F et on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$, pour tout $x \in F$.

Exercice 3. Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

Pour tout $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2(t) dt \right)^{1/2}$$

- 1) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont trois normes sur E et on a, pour tout $f \in E$,

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$$

- 2) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$, on pose $f_n(t) = t^n$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_2$. En déduire que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

Exercice 4. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(a, b) \in E^2$, $a \neq b$ et deux réels $r, s > 0$.

1) On suppose que $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset$. Montrer que $\|a - b\| < r + s$.

2) Réciproquement on suppose que $\|a - b\| < r + s$. Montrer qu'il existe un réel $t \in [0, 1]$ tels que $x = ta + (1 - t)b \in B(a, r) \cap B(b, s)$, donc $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset$.

Exercice 5. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tous $a \in E$ et $r \geq 0$, on pose

$$B'(a, r) = \{x \in E / \|a - x\| \leq r\}$$

Soient $(a, b) \in E^2$ et r, s deux réels > 0 tels que $B'(a, r) \subset B'(b, s)$.

1) On suppose que $a \neq b$, on pose $u = a + r \frac{a - b}{\|a - b\|}$. Montrer que $u \in B'(a, r)$, en déduire que

$$\|a - b\| \leq s - r.$$

2) On suppose que $a = b$. Montrer que $r \leq s$. (Considérer le vecteur $u = a + re$ avec $\|e\| = 1$).

Exercice 6. Soient $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^k et $B'(a_n, r_n)$ une suite de boules fermées de \mathbb{R}^k qui vérifie $B'(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset B'(a_n, r_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que

$$\|a_{n+p} - a_n\| \leq r_n - r_{n+p} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Indication: Utiliser le résultat de l'exercice 5.

2) En déduire que les suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. On pose $r = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$ et $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|a_n - a\| \leq r_n - r$.

3) Montrer que $B'(a, r) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B'(a_n, r_n)$.

Exercice 7. Soient $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^p et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice qui vérifie $\|Ax\| \leq \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$. Soit $a \in \mathbb{R}^p$, $\|a\| \leq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_n = \frac{1}{n+1} (a + Aa + A^2a + \dots + A^na).$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq 1$. En déduire qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un $x \in \mathbb{R}^p$ et $\|x\| \leq 1$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|Ax_n - x_n\| \leq \frac{2}{n+1}$.

3) Dédire de ce qui précède que $Ax = x$.

Exercice 8. Soient A un fermé de \mathbb{R} et f une fonction continue de A dans \mathbb{R} . On pose

$$\mathbf{G}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 / x \in A\}$$

1) Montrer que \mathbf{G}_f est un fermé de \mathbb{R}^2 .

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que \mathbf{G}_f est un fermé de \mathbb{R}^2 . f est elle continue ?

Exercice 9. 1) Montrer que l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 . A est il un compact de \mathbb{R}^2 ?

2) l'ensemble $B = \{(x, y) \in A / y > 0\}$ est il un fermé de \mathbb{R}^2 ? est il un ouvert de \mathbb{R}^2 ?

Exercice 10. Soit A un fermé de \mathbb{R}^2 . On considère l'ensemble B de \mathbb{R} défini par

$$x \in B \iff \exists y \in [0, 1], \text{ telque } (x, y) \in A.$$

Montrer que B est un fermé de \mathbb{R} .

Exercice 11. Soit $I =]0, 1[\setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que I est un ouvert de \mathbb{R} et $\bar{I} = [0, 1]$.

Exercice 12. 1) l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$ est il un fermé de \mathbb{R}^2 ? est il un ouvert de \mathbb{R}^2 ? Déterminer \bar{A} .

2) Montrer que $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 < 1\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 et déterminer \bar{B} .

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) < 0\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \leq 0\}.$$

1) Montrer que $\bar{A} \subset B$ et $A \subset \overset{\circ}{B}$.

2) On suppose que f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

A t-on $\bar{A} = B$ et $\overset{\circ}{B} = A$?

Exercice 14. Soit $A = [0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\}$. Montrer que les ensembles $A, \bar{A}, \overset{\circ}{A}, \bar{\overset{\circ}{A}}$ et $\overset{\circ}{\bar{A}}$. Sont deux à deux distincts.

Exercice 15. \mathbb{R}^n étant muni d'une norme $\| \cdot \|$ quelconque . Soit A une partie non vide de \mathbb{R}^n . On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|.$$

En déduire que f est continue sur \mathbb{R}^n .

2) Montrer que $f(x) = d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

3) Montrer que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

4) On suppose que A est un fermé de \mathbb{R}^n . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un $a \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a\|$.

Exercice 16. Soit A et B deux parties non vides de \mathbb{R}^n qui vérifient

$$A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset.$$

1) Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = d(x, A) - d(x, B)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\varphi(x) < 0, \forall x \in A$ et $\varphi(x) > 0, \forall x \in B$.

2) En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de \mathbb{R}^n tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 17. Soient K un compact de \mathbb{R}^n et U un ouvert de \mathbb{R}^n qui contient K . On veut montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, $B(x, r) \subset U$.

1) Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = d(x, \mathbb{R}^n \setminus U)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que, pour tout $x \in K$, $\varphi(x) > 0$. En déduire qu'il existe un réel $r > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, on a $\varphi(x) \geq r$.

2) Montrer que pour tout $x \in K$, $B(x, r) \subset U$.

Exercice 18. On considère la fonction $f : A = [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} & \text{si } (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur A et on a:

$$\forall (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) \leq \frac{1}{x+y}.$$

2) On pose

$$K = \left\{ (x, y) \in A / f(x, y) \geq \frac{1}{8} \right\}.$$

a) Montrer que K est un compact non vide de \mathbb{R}^2 et on a $\frac{1}{8} \leq \underset{(x,y) \in K}{\text{Max}} f(x, y)$.

b) En déduire que f est majorée sur A et atteint sa borne supérieure.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. On pose $K = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq f(0)\}$.
Montrer que K est un compact de \mathbb{R}^n . En déduire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) \leq f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 20. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 1\}$.

1) Montrer que A est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

2) On pose $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 1\}$. Montrer que X est un fermé de A . A est-il connexe ?

Exercice 21. Soient $S = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Montrer que S est un compact, connexe de \mathbb{R}^2 .

2) On considère la fonction la fonction $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(X) = f(X) - f(-X), \quad X \in S.$$

a) Montrer qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $g(S) = [-M, M]$.

Indication: Utiliser le fait que $g(X) = -g(-X)$ pour tout $X \in S$.

b) En déduire qu'il existe $X_0 \in S$ tel que $f(X_0) = f(-X_0)$, et par suite f n'est pas injective.

Exercice 22. Soit A une partie de \mathbb{R}^n qui vérifie : Pour tout $(x, y) \in A \times A$, il existe une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow A$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$. Montrer que A est un connexe.

Exercice 23. 1) Montrer que l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x\}$ est un connexe de \mathbb{R}^2 .
 2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. On considère la fonction $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) = (f(x) - f(y))(x - y), \quad (x, y) \in D.$$

Montrer que $\varphi(D)$ est un intervalle de \mathbb{R} qui ne contient pas 0. En déduire que f est strictement monotone.

Exercice 24. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur \mathbb{R} qui vérifie

$$|f'(t)| \leq k |f(t)| \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

avec k une constante strictement positive. On veut montrer que s'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$ alors f est la fonction nulle. On pose $A = \{t \in \mathbb{R} / f(t) = 0\}$.

1) Montrer que A est un fermé de \mathbb{R} .

2) Soient $t_0 \in A$ et $h > 0$. On pose $M = \sup_{t \in [t_0-h, t_0+h]} |f(t)|$.

a) Montrer que pour tout $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ on a $|f(x)| \leq kMh$. (Ind: Utiliser le théorème des accroissements finis).

b) En déduire que si $kh < 1$, on a $f(t) = 0$, pour tout $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ et par suite A est un ouvert de \mathbb{R} . Conclure.

Exercice 25. Soit $\| \cdot \|$ une norme sur \mathbb{R}^p . Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\| \| A \| \| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \neq 0 \right\}.$$

On rappelle que $\| \| \cdot \| \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \| \| AB \| \| \leq \| \| A \| \| \cdot \| \| B \| \|.$$

2) Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq kN(A)N(B).$$