Suites de fonctions

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & si \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1) Monntrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle. La convergence est elle uniforme sur $[0,1]$?
2) Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,1]$, pour tout $a \in]0,1[$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.
1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = e^x$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $\varphi_n(x) = n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - x$.
a) Etudier le sens de variation de la fonction φ_n. En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,a]$, pour tout $a > 0$.
b) la convergence est elle uniforme sur $[0,+\infty[$?

Exercice 3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,\pi/2]$ par :

$$\forall x \in [0,\pi/2], \quad f_n(x) = n\sin x\cos^n x.$$

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f qu'on déterminera.
2) a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$.
b) En déduire que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniforme sur $[0,\pi/2]$.

Exercice 4. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1,1],\ f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad f_{n+1}(x) = \left(\frac{x^2+u_n^2(x)}{2}\right)^{1/2}.$$

1) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions. En déduire qu'elle converge simplement vers une fonction f qu'on déterminera.

2) En étudiant la différence $f_n^2 - f^2$, montrer que la suite $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers f^2.
3) En déduire la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[-1,1]$.
Indication: On rappelle que, pour tous $a, b > 0$, $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{|a-b|}$.

<u>Exercice 5</u>. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,\pi]$, on pose $f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,\pi]$, on a

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

2) En utilisant le critère de Cauchy, montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$. On désigne par f sa limite.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,\pi]$, on a

$$2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f_n(x) = \sin x.$$

En déduire l'expression de $f(x)$.

<u>Exercice 6</u>. Soit $f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$.
1) En utilisant le critère de Cauchy. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$.
2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

<u>Exercice 7</u>. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [-0,1], \quad f_0(x) = 0 \qquad et \qquad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x - f_n^2(x)}{2}\ .$$

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ et\ \forall x \in [0,1]\ , \quad 0 \leq f_n(x) \leq \sqrt{x}\ .$$

On déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$.
2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ et\ \forall x \in [0,1]\ , \quad 0 \leq \sqrt{x} - f_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}\ .$$

En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.