

Exercices : Séries Numériques.

Exercice 1 Déterminer la nature de la série de terme générale :

$$(\ln(n))^{-\sqrt{n}}, \quad \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}, \quad (n^\alpha \cdot \ln^\beta(n))^{-1}, \quad \sin\left(\pi \cdot \frac{n^3}{1+n^2}\right).$$

Exercice 2 Étudier et Calculer la somme de la série de terme général :

$$\frac{1}{2^n} \cdot \tan \frac{x}{2^n}, \quad \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right), \quad \frac{2n-1}{n^3-4n}.$$

Exercice 3 Soit (u_n) une suite de réels positifs ou nuls, telle que $\sum u_n$ converge.

Montrer que $\sum v_n$ converge où : $v_n = \sqrt{u_n \cdot u_{n+1}}$ et $v_n = \frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $u_n = \frac{2n!}{(2^n \cdot n!)^2}$, $v_n = \frac{u_n}{n+1}$

- (a) Déterminer un équivalent de $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, en déduire que $u_n \rightarrow 0$.
- (b) Montrer que $n \cdot u_n \rightarrow +\infty$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
- (c) En observant et en sommant les égalités : $(2k+4) \cdot v_{k+1} = (2k+1) \cdot v_k$.

Calculer $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$ en fonction de n et v_{n+1} .

En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1}$.

Exercice 5 Soit $\alpha > 0$. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$. Quelle est la nature de la série $\sum R_n$?

Exercice 6 Transformation d'Abel :

Soit (v_n) une suite décroissante qui converge vers 0 et (u_n) une suite dont la suite des sommes partielles

$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est bornée, on se propose de montrer que la série de terme général : $\alpha_n = u_n \cdot v_n$ est convergente.

Montrer que la série $\sum (v_n - v_{n+1}) \cdot S_n$ est absolument convergente.

Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n \alpha_k = \sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1}) \cdot S_k + v_{n+1} \cdot S_n$. Conclure.

Exercice 7 Règle de Duhamel :

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs tq : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n$ avec $\sum |v_n|$ converge ; Montrer qu'il existe $K > 0$ tq : $u_n \sim \frac{K}{n^\alpha}$; On pourra utiliser la suite (b_n) définie par : $b_n = \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha \cdot u_{n+1}}{n^\alpha \cdot u_n}\right)$.

Application : $u_n = n^{-n} \cdot n! \cdot e^n$.

Exercice 8 Théorème d'Euler :

Soit (p_n) la suite ordonnée des nombres premiers ($p_0 = 2$).

- (a) Soit α un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{p_n^\alpha}$ converge.

A tout $n \in \mathbb{N}$, on associe $\theta_n = \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)$. Montrer que (θ_n) admet une limite finie strictement positive

θ , et que $\frac{1}{\theta} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha}$.

- (b) Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{p_n}$.