Séries numériques

Exercice 1. Déterminer la nature de la série de terme général:

1) $\dfrac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{n}+n\cos^2 n}$ 3) $\dfrac{2+\cos n}{n^\alpha}$ 4) $\ln\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}$ 5) $\dfrac{n!}{n^n}$

6) $\dfrac{2^{n^2+n}}{3^{n^2+1}}$ 7) $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$ 8) $\dfrac{1}{n}+\ln\dfrac{n}{n+1}$ 9) $\dfrac{1}{n}\ln(\sin\dfrac{1}{n})$

Exercice 2. Soit $u_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}a^n$, où $a > 0$.
1) On suppose que $a \neq \dfrac{1}{27}$. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$?
2) On suppose que $a = \dfrac{1}{27}$. Étudier la monotonicité de la suite $(nu_n)_{n\geq 1}$. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs.
1) Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors, les séries de terme général u_n^2 et $\dfrac{u_n}{1+u_n}$ sont convergentes.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réels à termes strictement positifs.
1) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge.
2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Exercice 5. Pout tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1/2}$ et $v_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$.
1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(u_n)$ est convergente.

2) Vérifier que $\ln(u_n) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel $k > 0$.
3) Sachant que $\lim_{n\to +\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$, calculer k. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Exercice 6. Déterminer la nature de la série de terme général:

$$(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}, \qquad \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}, \qquad \ln n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), \qquad e^{(-1)^n/n^\alpha} - 1$$

Exercice 7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n(k) = 1 - (1-e^{-n})^k$.
1) Montrer que la série de terme général $u_n(k)$ est convergente. On pose $S(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(k)$. Calculer $S(1)$ et $S(2)$.
2) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \left(1-(1-e^{-x})^k\right) dx$ converge. Soit I_k sa valeur. Montrer qu'on a $I_k \leq S(k) \leq I_k + 1$.
3) Calculer I_k (poser $t = 1 - e^{-x}$). En déduire que $S(k)$ est équivalent à $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$, lorsque $k \to +\infty$.

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(1+i)^n a^n}{n^2+1}.$$