Séries entières

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$a)\ \sum_{n\geq 0}\sin(n)x^n,\quad b)\ \sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{n!}x^n,\quad c)\ \sum_{n\geq 0}\frac{4^n}{n+1}x^{2n}.$$

Exercice 2. Soient $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$, $\sum_{n\geq 0}b_nx^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'.
1) On suppose qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$ on a $|a_n|\leq|b_n|$. Montrer que $R'\leq R$.
2) On suppose que $|a_n|\underset{+\infty}{\sim}|b_n|$. Montrer que $R=R'$.

Exercice 3. 1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}x^{2n+1}.$$

On désigne par $f(x)$ sa somme.
2) Montrer que f vérifie l'équation différentielle

$$(x^2-2)f'(x)+xf(x)+2=0.$$

3) En déduire une expression explicite de la fonction f.

Exercice 4. 1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)}$ et préciser sa nature aux points $x=R$ et $x=-R$.
2) Montrer que la somme f de cette série est continue sur l'intervalle $[-R,R]$.
3) Déterminer une expression explicite de $f(x)$ pour $x\in]-R,R[\setminus\{0\}$.Que vaut $f(0)$?
4) Déduire de ce qui précède la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$

Exercice 5. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes:

$$a)\ \sum_{n\geq 0} n^2x^n \qquad b)\ \sum_{n\geq 0}\frac{n+2}{n!}x^n \qquad c)\ \sum_{n\geq 0}\mathrm{ch}(n)x^n \qquad d)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^n$$

$$e)\ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n)!}x^n \quad f)\ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}x^n \quad g)\ \sum_{n\geq 1}\Big(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\Big)x^n$$

<u>**Exercice 6**</u>. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=u_1=1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2}=u_{n+1}+\frac{2}{n+2}u_n, \quad n\geq 0.$$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $1\leq u_n\leq n^2$.
b) En déduire la valeur du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0}u_nx^n$.

2) Pour tout $x\in]-R,R[$, on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$. Montrer que la fonction f vérifie l'équation différentielle

$$(1-x)f'(x)-(1+2x)f(x)=0.$$

En déduire une expression explicite de la fonction f.

<u>**Exercice 7**</u>. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels qui converge vers 1.
1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n}x^n.$$

On désigne par f sa somme.
2) Déterminer le développement en série entière de la fonction $g(x)=f(x)+\ln(1-x)$.
3) a) Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout $x\in]0,1[$ on a

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{|a_n-1|}{n}x^n\leq\varepsilon\left|\ln(1-x)\right|.$$

b) En déduire que

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{g(x)}{\ln(1-x)}=0.$$

Déterminer

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)}{\ln(1-x)}$$

<u>**Exercice 8**</u>. On considère l'équation différentielle

$$(E)\qquad \begin{cases}(1-x^2)y'-xy=1\\ y(0)=0\end{cases}$$

1) Montrer que (E) admet une unique solution f développable en série entière et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.
2) Résoudre directement l'équation (E) sur $]-1,1[$.
3) En déduire le développement en série entiére de la fonction $g(x) = (\text{Arcsin}x)^2$.

<u>Exercice 9</u>. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et de somme f. On suppose que f est une solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)f''(x) = 2f(x)$$

1) Établir une relation de récurrence entre a_n et a_{n+2}. En déduire la valeur de a_{2n} pour tout $n \geq 2$.
2) On suppose que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Calculer a_0, a_2 et la valeur de a_{2n+1} pour $n \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$. Quel est son rayon de convergence ?
4) Exprimer $g(t) = \dfrac{f'(t)-1}{t}$, $t \neq 0$ sous la forme d'une somme d'une série. En déduire une expression explicite de la fonction f.
5) Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.