Exercices : Réduction des endomorphismes.

Exercice 1 :

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que : $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Quels sont les sous espaces stables par u ?

Exercice 2 :

Soit $E = \mathbb{R}^3$, on considére l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
Quels sont les s.e.v de $\mathbb{R}^3$ stables par cet endomorphisme ?

Exercice 3 :

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on définit :

$$u : f \in E \longmapsto u(f)(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si x=0} \\ \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt & \text{si x} > 0 \end{cases}$$

Montrer que u est un endomorphisme de E et chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.
Diagonaliser u sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4 :

Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on définit $\phi : g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \longmapsto f \circ g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
Montrer que (λ valeur propre de f)$\Rightarrow$ (λ valeur propre de ϕ)
Chercher la dimension de $E_\lambda(\phi)$ en fonction de celle de $E_\lambda(f)$.
Que dire si f est diagonalisable ? Préciser, dans une bonne base, la matrice obtenue pour ϕ.

Exercice 5 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que : $S^tAS = A$.
Calculer $det(A)$; montrer que S est inversible et que S^t et S^{-1} sont semblables.
Que dire des valeurs propres de S ?

Exercice 6 :

Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que : $A^2 = B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 :

Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coéfficients strictement positifs
(i.e $a_{ij} > 0$ et $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$)
Montrer que 1 est valeur propre de A et que E_1 le sous-espace propre associé est de dimension 1.
Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A, on a : $|\lambda| \leq 1$.
Si λ est valeur propre telle que $|\lambda| = 1$ alors $\lambda = 1$.

Exercice 8 :

Soit $a,\ b \in \mathbb{R}^*$ tels que : $|a| = |b|$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & b & a & \cdots & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer $rg(A)$. En déduire que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous espace-propre associé.
2. Déterminer deux vecteurs propres non coliéaires et en déduire que A est diagonalisable.

Exercice 9 :

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour $P \in E$, on pose : $\phi(P) = P - (X+1)P'$.

1. Justifier que ϕ définit un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres de ϕ et justifier que ϕ est diagonalisable.

Exercice 10 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $f(M) = AM$ pour toute $M \in M_n(\mathbb{C})$.

1. f est-elle un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
2. Etudier l'équivalence entre les inversibilités de A et f.
3. Etudier l'équivalence entre les diagonalisabilités de A et f.

Exercice 11 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieur stricte.

Le résultat est-il encore vrai pour $A \in M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 12 :

Soient u et v deux endomorphismes de E espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ qui commutent :(i.e $u \circ v = v \circ u$). Montrer que si u et v sont diagonalisables alors ils le sont dans la même base de vecteurs propres communs (on parle de diagonalisation simultanée).

Exercice 13 :

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.
On note $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f.

1. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer qu'un endomorphisme g appartient à $\mathcal{C}_f$ ssi chaque sous-espace propre de f est stable par g.
3. En déduire que $dim(\mathcal{C}_f) = \displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(f)} \alpha_\lambda^2$ où α_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.
4. On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(Id, f, ..., f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 14 :

Soit $A_1 \in M_p(\mathbb{K})$, $A_2 \in M_q(\mathbb{K})$ et $A \in M_{p+q}(\mathbb{K})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est diagonalisable ssi A_1 et A_2 le sont.

Exercice 15 :

Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que : $A^2 = B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.