Intégrales généralisées

Exercice 1. Calculer les intégrales généralisées suivantes, en montrant leur convergence :

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \quad 2)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} \quad 3)\ \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+x^2+x+1}$$

$$4)\ \int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx \quad 5)\ \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx \quad 6)\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \quad \text{Poser } y = x^2$$

Exercice 2. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1)\ \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \quad 2)\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{1+x^2}\,dx \quad 3)\ \int_0^{+\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)dx$$

$$4)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+|\sin x|} \quad 5)\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}\,dx \quad 6)\ \int_0^{+\infty} x^\alpha(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})\,dx, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$7)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x - \sin 3x}{x^{3/2}}\,dx \quad 8)\ \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx \quad 9)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\sin x \ln x\,dx$$

Exercice 3. 1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt$ est convergente et calculer sa valeur (Poser $x = 2t-1$).

2) Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,dt$.

Montrer que l'intégrale I est convergente.

3) Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{1-t}}$ sur l'intervalle $]0,1[$.

4) En déduire que $I = -2\pi$.

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt$.

1) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n.$$

3. En déduire la valeur de I_n en fonction de n. (On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est dérivable en 0, et que $f(0) = 0$.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est convergente.

2) On suppose que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\, dt$ est divergente.

Exercice 6. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

1) Montrer que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq x f(x) \leq 2 \int_{x/2}^{x} f(t)dt.$$

2) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0$.

Exercice 7. 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx} \text{Arctg}(x)\, dx$ est convergente.

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} e^{-nx} \text{Arctg}(x) dx = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^2} \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

3) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^2 \int_0^{+\infty} e^{-nx} \text{Arctg}(x)\, dx = 1$.

Exercice 8. 1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctg}(\pi t) - \text{Arctg}(t)}{t}\, dt$ est convergente.

2) a) Pour tout $a > 0$, on pose $\displaystyle I(a) = \int_0^a \frac{\text{Arctg}(\pi t) - \text{Arctg}(t)}{t}\, dt$. Montrer que

$$I(a) = \int_a^{2a} \frac{\text{Arctg}(t)}{t}\, dt$$

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctg}(\pi t) - \pi/2}{t}\, dt$ est convergente. En déduire que

$$I = \frac{\pi}{2} \ln(\pi).$$

Exercice 9. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + x + 1}\, dx \quad 2) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}\, dx \quad 3) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x}\, dx$$