

# Feuille d'exercices

## Extremum

**Exercice 1.** Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et étudier leur nature

$$f_1(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}, \quad f_2(x, y) = x^3 + y^3 - 2(x + y)^2 - 3(x + y),$$

$$f_3(x, y) = x(3 - 4x^2 - 3y^2), \quad f_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz.$$

**Exercice 2.** On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = 3x^4 - 4yx^2 + y^2$ .

1) Montrer que  $(0, 0)$  est l'unique point critique de  $f$ .

2) Calculer  $f(x, 0)$  et  $f(x, 2x^2)$ . En déduire la nature du point  $(0, 0)$ .

**Exercice 3.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ , et  $f : ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = x \ln y + y \ln x + a(x^3 + y^3), \quad \forall (x, y) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[.$$

1) Calculer les dérivées de  $f$  jusqu'à l'ordre 2 en  $(1, 1)$ .

2) Pour qu'elle valeurs de  $a$  la fonction  $f$  admet-elle un extremum local en  $(1, 1)$ . Préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

**Exercice 4.** On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x + y)$ . Déterminer les points critiques de  $f$  dans  $[0, \pi] \times [0, \pi]$  et étudier leur nature.

**Exercice 5.**  $\mathbb{R}^n$  étant muni de sa norme euclidienne canonique. On pose  $B = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < 1\}$  et  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ .

Soit  $f : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, différentiable sur  $B$ . On suppose que  $f$  est constante sur  $S$ . Montrer que  $f$  admet un point critique dans  $B$ .

**Exercice 6.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y)$ . On pose

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$$

1) Montrer que  $f$  est bornée sur  $K$  et  $y$  atteint ses bornes.

2) Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  dans  $K$ , ainsi que les points où ils sont atteints.

3) Déduire de ce qui précède que  $f$  est majorée sur  $A = [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$  et déterminer

$$\sup_{(x, y) \in A} f(x, y)$$

**Exercice 7.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - \frac{1}{2}(x + y)$ . On pose

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 2\}$$

- 1) Montrer que  $f$  est bornée sur  $K$  et y atteint ses bornes.
- 2) Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  dans  $K$ , ainsi que les points où ils sont atteints.

**Exercice 8.** On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$ .

- 1) Étudier les extremum locaux de  $f$ .
- 2) Soit  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Montrer que  $f$  a un maximum  $M$  et un minimum  $m$  sur  $B$ .
- 3) Soit  $(a, b) \in B$ . Montrer que si  $f(a, b) = M$  ou  $f(a, b) = m$ , alors  $a^2 + b^2 = 1$ .
- 4) Étudier la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(t) = f(\cos t, \sin t)$ . En déduire les valeurs de  $M$  et  $m$ .

**Exercice 9.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue qui vérifie  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ .

- 1) Montrer que l'ensemble

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq f(0)\}$$

est un compact de  $\mathbb{R}^n$ .

- 2) En déduire qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x_0) \leq f(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- 3) Application. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y \sin x$ . Montrer que  $f$  admet un minimum global qu'on déterminera.

**Exercice 10.** On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$ .

- 1) a) Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $|x^2 + y^2| \leq x^2 + y^2 + 1$ . En déduire que  $f(x, y) \rightarrow 0$  quand  $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ .
- b) Montrer que les ensembles

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(0, 1) \leq f(x, y)\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) \leq f(0, -1)\}$$

sont compacts.

- c) En déduire que  $f$  est majorée et minorée dans  $\mathbb{R}^2$ , et qu'elle atteint son maximum dans  $A$  et son minimum dans  $B$ .
- 2) Trouver les points critiques de  $f$  dans  $\mathbb{R}^2$ .
- 3) Déterminer le maximum et le minimum de  $f$  dans  $\mathbb{R}^2$  ainsi que les points où ils sont atteints.