Exercices : Espaces vectoriels normés.

Exercice 1 *Soit E l'ensemble des applications $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[0,1]$ et telles que : $f(0) = 0$, soit $N_\infty, N'_\infty : E \to \mathbb{R}$ les applications définies par :*

$$N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad N'_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} \left|f'(t)\right|.$$

Montrer que les applications N_∞ et N'_∞ sont des normes sur E, mais qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 2 *Montrer que si un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé E est ouvert alors $F = E$.*

Exercice 3 *On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.*

1. *Montrer que $\overline{A}$ est convexe.*
2. *La partie A^o est-elle convexe ?*

Exercice 4 *Soit E un espace vectoriel normé non nul et $a, a' \in E$, $r, r' > 0$ tel que : $B_f(a, r) = B_f(a', r')$, montrer que : $a = a'$ et $r = r'$.*

Exercice 5 *Soit E un evn , A et B deux parties non vides de E, $d_A : E \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$.*
Montrer que : $d_A = d_B \Longleftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

Exercice 6 *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $g \in E$. Pour tout $f \in E$, on pose : $N(f) = \sup_{x\in[0,1]} \mid f(x).g(x) \mid$.*

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour N soit une norme sur E.*
2. *Si pour tout $x \in [0,1]$: $g(x) \neq 0$ montrer que N et $\| \; . \; \|_\infty$ sont des normes sur E équivalentes.*
3. *Démontrer la réciproque de la proposition précédente.*

Exercice 7 *Soit $E = C([a,b], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie, $A = \{f \in E, \forall x \in [0,1] : f(x) \neq 0\}$. Calculer l'intérieur de A et son adhérence.*

Exercice 8 *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, et soit P l'ensemble des fonctions de E positives ou nulles.*

1. *Chercher l'intérieur et l'adhérence de P*
2. *Meme question avec la norme de la convergence en moyenne.*

Exercice 9 *Soit E un evn, $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on note $V_p = \{u_n, n \geq p\}$, montrer que $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{V}_p$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$.*

Exercice 10 *Soit E un evn, A une partie non vide de E.*
Pour chaque $\alpha > 0$,on note $V_\alpha(A) = \{x \in E, d(x, A) < \alpha\}$.
Montrer que $\forall\ \alpha > 0, V_\alpha(A)$ est un ouvert de E contenant $\overline{A}$.
Montrer que : $\bigcap_{\alpha>0} V_\alpha(A) = \overline{A}$.

Exercice 11 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, calculer $\sup\limits_{\|X\|_\infty \leq 1} \|AX\|_\infty$ et $\sup\limits_{\|X\|_1 \leq 1} \|AX\|_1$.*

Exercice 12 *Soit $u = (u_n)_n$ une suite d'éléments de E.*
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u noté $Adh(u)$ est tel que : $Adh(u) = \bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p, p \geq n\}}$.

Que peut-on conclure.

Exercice 13 *$E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \; . \; \|_\infty$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.X^k \to \| P \|_\infty = \max\limits_{0\leq k\leq n} \mid a_k \mid$.*

Montrer que la suite $(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{X^k}{k})_n$ n'a pas de valeur d'adhérence dans E.

Exercice 14 *Soit* $(F_n)_n$ *une suite décroissante au sens de l'inclusion de fermés non vides d'un evn* E *complet. On suppose que :* $\delta(F_n) \to 0$*. Montrer que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ *est un singleton.*

Exercice 15 *Soit* A *une partie non vide et bornée d'un evn* (E, N) *de dimension finie.*

1. *Etablir l'existence d'une boule fermée de rayon minimum contenant* A.
2. *Montrer l'unicité de celle-ci quand* (E, N) *est euclidien.*

Exercice 16 *Soit* K *et* L *deux compacts disjoints d'un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que* $d(K, L) > 0$.

Exercice 17 *Soit* F *une partie fermée non vide d'un evn de dimension finie* E.

1. *Montrer que pour tout* $x \in E$*, la distance de* x *à* F *est atteinte en un certain* $y_0 \in F$.
2. *Y'a-t-il unicité ?*

Exercice 18 *On considére* $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ *muni de la norme* $\| \, . \, \|_1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$*, on considére,* f_n *définie par :*

$$\forall x \in [0,1], f_n(x) = \begin{cases} 1, & si\ 0 \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\ ; \\ -n.x + \frac{n}{2}, & si\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2}\ ; \\ 0, & si\ \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

1. *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *est de Cauchy.*
2. *En déduire que l'espace vectoriel normé* $(E, \| \, . \, \|_1)$ *n'est pas complet.*

Exercice 19 *On se propose de montrer le théorème de Riesz suivant :*
Un espace vectoriel normé E *est de dimension finie ssi* $B_F(0, 1)$ *est compacte.*
Soit E *un evn dont la boule unité fermée* $B = B_F(0, 1)$ *soit compacte.*

1. *Montrer qu'il existe* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $a_1, ..., a_n \in E$ *tels que :* $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{1}{2})$.
   On note $V = vect(a_i, 1 \le i \le n)$*. On se propose de montrer que* $V = E$*, en raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe* $x \in E$ *tel que :* $x \notin V$.
2. *Montrer que* $d(x, V) > 0$ *; On note désormais :* $\epsilon = d(x, V)$.
3. *Montrer qu'il existe* $y \in V$ *tel que :* $\epsilon \le d(x, y) \le \frac{3}{2}.\epsilon$.
   On note désormais : $z = \frac{(x-y)}{d(x,y)}$.
4. *Montrer qu'il existe* $i \in \{1, ..., n\}$ *tel que :* $d(z, a_i) \le \frac{1}{2}$.
5. *Etablir que :* $d(x, y).d(z, a_i) \ge \epsilon$ *et conclure.*