Fonctions différentiables

Exercice 1. Etudier la continuité et la différentiabilité des fonctions suivantes:

$$f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 2. Soient $\alpha > 0$ et $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que f_α est continue en $(0,0)$ si est seulement si $\alpha > 1$.
2) Montrer que f_α est différentiable en $(0,0)$ si est seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 3. 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = |xy|$. Etudier la différentiabilité de f en $(0,0), (0,a)$ et $(a,0)$; $a \neq 0$.
2) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi'(0) = 0$. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \varphi(|xy|)$. Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle en tout point $(a,0)$; $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Montrer que f admet des dérivées partielles au point $(0,0)$.
2) Calculer les dérivées partielles de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
3) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. 1) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.
2) On suppose que la norme N provient d'un produit scalaire qu'on note $\langle\ ,\ \rangle$.
a) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle x, x\rangle$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer sa différentielle.

b) En déduire que N est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,,\ \forall h \in \mathbb{R}^n \qquad dN(x)h = \frac{\langle x, h\rangle}{N(x)}$$

<u>Exercice 6</u>. On munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de norme associée $||\ ||$. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $g(x) = \|f(x) - a\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et on a

$$\forall x, h \in \mathbb{R}^n, \quad Dg(x)h = 2\,\langle f(x) - a, Df(x)h\rangle\,.$$

<u>Exercice 7</u>. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables et déterminer leurs matrices jacobiennes :

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x, y, z) = (f(x, y) + ye^z, xyz), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

b) $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \psi(x, y) = (xf(x, y), \sin(xy)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

<u>Exercice 8</u>. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = f(x^2 - y^2, x^2 + y^2)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ en fonction des dérivées partielles de f.

<u>Exercice 9</u>. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$g(x, y) = (\cos x + \sin y, \sin x + \cos y, e^{x-y}), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne.
2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$\varphi(x, y) = f(\cos x + \sin y, \sin x + \cos y, e^{x-y}), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Montrer que φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
b) On suppose que $Df(1, 1, 1)) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $D\varphi(0, 0)$.

<u>Exercice 10</u>. Soient $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ y > 0\}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U qui vérifie

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On considère la fonction $F : U \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = f(xy, y)$, pour tout $(x, y) \in U$.
1) Montrer que F est différentiable sur U et que, pour tout $(x, y) \in U$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y\frac{\partial f}{\partial x}(xy, y) \quad et \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(xy, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(xy, y).$$

2) En déduire que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$, pour tout $(x,y) \in U$ et trouver l'expression de $F(x,y)$.
3) Montrer que les solutions de (E) sont exactement de la forme

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

<u>**Exercice 11**</u>. Soient U un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U .
1) Soit a et b deux points de U. On considère la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f((1-t)a + tb), \quad t \in [0,1]$$

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $\varphi'(t)$.
b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(b) - f(a) = \langle \nabla f(c), b-a \rangle.$$

2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Existe t-il un réel c tel que

$$g(2\pi) - g(0) = 2\pi g'(c).$$

<u>**Exercice 12**</u>. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \arctan(x^2+y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer le gradient de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2) Montre que

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad \frac{2t}{1+t^4} \leq C = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{1/4}.$$

3) En déduire que

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^2, \quad |f(A) - f(B)| \leq C\,\|A-B\|,$$

où $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$.

<u>**Exercice 13**</u>. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\varphi'(0) = 0$ et $|\varphi'(t)| \leq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \varphi(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n$, où $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.
1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer le gradient de f en tout point $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2) Montrer que toutes les dérivées partielles de f existent en 0 et en déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.
3) En évaluant la norme du gradient de f, prouver que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x-y\|.$$

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe si, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y).$$

1) On suppose que f est différentiable et convexe sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) + < \nabla f(x), y-x > \leq f(y) \tag{1}$$

Indication: Considérer la fonction $g(t) = f((1-t)x+ty)-(1-t)f(x)-tf(y),\ t \in [0,1]$ et calculer $g'(0)$.
2) Réciproquement, montrer que si f vérifie (1) alors f est convexe.
3) On suppose f convexe et différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Soit $x_o \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x_o) = 0$. Montrer que f a un minimum absolu en x_o.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 16. 1) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{xy^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et donner la formule de Taylor de f à l'ordre 2 en $(0,0)$.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que g admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les calculer.
c) La fonction g est-elle différentiable en $(0,0)$?