Feuille d'exercices

Continuité

Exercice 1. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ par :

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \qquad g(x,y) = \frac{x}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}.$$

Étudier les limites de $f(x,y)$ et $g(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.

Exercice 2. Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Exercice 3. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^\alpha}{x^2+|y|} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que si $\alpha > 1$, alors f_α est continue en $(0,0)$.
2) On supoose que $\alpha \leq 1$. Montrer que f_α n'est pas coninue en $(0,0)$.

Exercice 4. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ a & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2,x)$.
2) En déduire que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-3xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout réel $\alpha \geq 1$, la fonction f_α n'est pas continue en $(0,0)$.
2) On suppose que $\alpha < 1$. Montrer que f_α est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Indication: Utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ dans $\mathbb{R}$ et D une partie dense de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $x \in D$, on a $f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^p$.
1) Montrer que pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^p$ qui vérifient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f(x_n) - f(y_n)\| = 0$.
2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \sqrt{|x^2-y^2|}$. Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9. On considère la fonction $f : A = [0,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} & si \quad (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur A et on a:

$$\forall (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(x,y) \leq \frac{1}{x+y}.$$

2) On pose

$$K = \left\{ (x,y) \in A /\ f(x,y) \geq \frac{1}{8} \right\}.$$

Montrer que K est un compact non vide de $\mathbb{R}^2$ et on a $\dfrac{1}{8} \leq \underset{(x,y)\in K}{Max}\, f(x,y)$.
3) En déduire que f est majorée sur A et atteint sa borne supérieure.

Exercice 10. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie

$$\forall (x,y) \in A \times A, \quad |f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|.$$

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sup_{a \in A} (f(a) - \|x - a\|)$.

1) Soit $b \in A$ fixé. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall a \in A, \quad f(a) - \|x - a\| \leq f(b) + \|x - b\| .$$

En déduire que la fonction g est bien définie.

2) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |g(x) - g(y)| \leq \|x - y\| .$$

En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}^n$.

3) Montrer que pour tout $x \in A$, on a $g(x) = f(x)$.