Feuille d'exercices (Calcul Différentiel)

Exercice 1. Etudier la continuité et la différentiabilité des fonctions suivantes

a) $f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$, b) $f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$, d) $f_4(x,y) = |xy|$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point $x_o \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o+h) + f(x_o-h) - 2f(x_o)}{\|h\|} = 0$$

Exercice 3. 1) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.
2) On suppose que la norme N provient d'un produit scalaire qu'on note $< \, , \, >$.
a) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) =< x, x >$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer sa différentielle.
b) En déduire que N est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,,\ \forall h \in \mathbb{R}^n \qquad dN(x)h = \frac{< x, h >}{N(x)}$$

Exercice 4. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symetrique. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $g(x) = f(Ax)$.
Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\nabla g(x) = A.\nabla f(Ax)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
1) On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x,y,z) = (f(x,y) + ye^z, xyz)$.
Montrer que φ est différentiable et déterminer sa matrice jacobienne $D\varphi(x,y,z)$.

2) On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = f(x^2 - y^2, x^2 + y^2)$.
Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifie pour $p > 0$

$$f(tx) = t^p f(x), \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On dit que f est homogène de degré p.
Montrer que pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = pf(x)$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = f(ta, tb)$.
1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(t)$. En déduire que $f(ta, tb) = f(a, b), \forall t > 0$
2) Montrer que f est constante.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$(E) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = f(t + a, t + b)$.
1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(t)$. En déduire $f(t + a, t + b) = f(a, b)$.
2) Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable qui vérifie

$$f(x,y) = \varphi(x - y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement montrer qu'une telle fonction f vérifie bien l'équation (E).

Exercice 9. Soient $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y > 0\}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U qui vérifie

$$(E) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On considère la fonction $F : U \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = f(xy, y)$, pour tout $(x, y) \in U$.
1) Montrer que F est différentiable sur U et que, pour tout $(x, y) \in U$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y\frac{\partial f}{\partial x}(xy, y) \quad et \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(xy, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(xy, y).$$

2) En déduire que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$, pour tout $(x, y) \in U$ et trouver l'expression de $F(x, y)$.
3) Montrer que les solutions de (E) sont exactement de la forme

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} & si \ (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 & si \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2) Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f.
3) f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 11. Soient U un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U .
1) Soit a et b deux points de U. On considère la fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f((1 - t)a + tb), \quad t \in [0, 1]$$

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $\varphi'(t)$.
b) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(b) - f(a) = df(c)(b - a).$$

2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Existe t-il un réel c tel que

$$g(2\pi) - g(0) = 2\pi g'(c).$$

Exercice 12. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et calculer $df(0,0)$.
2) Calculer les dérivées partielles de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3) On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$,

$$V(x,y) = \left(1 + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \, , \frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

On désigne par $\| \ \|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$.
a) Montrer que, pour tout $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, on a

$$\|V(x,y)\|^2 = 1 + y^2 + \frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq (1+|y|)^2 \, .$$

b) En déduire que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|\nabla f(x,y)\| \leq \frac{1+|y|}{\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} \leq \frac{1}{1+|y|}.$$

4) Montrer que, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|f(X) - f(Y)| \leq \|X - Y\|$$

Exercice 13. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\varphi'(0) = 0$ et $|\varphi'(t)| \leq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \varphi(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n$, où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.
1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer le gradient de f en tout point $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2) Montrer que toutes les dérivées partielles de f existent en 0 et en déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.
3) En évaluant la norme du gradient de f, prouver que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\| \, .$$

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe si, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

1) On suppose que f est différentiable et convexe sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) + < \nabla f(x), y - x > \leq f(y) \tag{1}$$

Indication: Considérer la fonction $g(t) = f((1-t)x + ty) - (1-t)f(x) - tf(y),\ t \in [0,1]$ et calculer $g'(0)$.
2) Réciproquement, montrer que si f vérifie (1) alors f est convexe.
3) On suppose f convexe et différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Soit $x_o \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x_o) = 0$. Montrer que f a un minimum absolu en x_o.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 16. Déterminer les points critiques des fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2} \quad et \quad g(x,y) = x^3 + y^3 - 2(x+y)^2 - 3(x+y),$$

et indiquer si possible leurs natures.

Exercice 17. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3x^4 - 4yx^2 + y^2$.
1) Montrer que $(0,0)$ est l'unique point critique de f.
2) Calculer $f(x,0)$ et $f(x,2x^2)$. En déduire la nature du point $(0,0)$.

Exercice 18. $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa norme euclidienne canonique. On pose $B = \{x \in \mathbb{R}^n /\ \|x\| < 1\}$ et $S = \{x \in \mathbb{R}^n /\ \|x\| = 1\}$.
Soit $f : \overline{B} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, différentiable sur B. On suppose que f est constante sur S. Montrer que f admet un point critique dans B.

Exercice 19. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.
1) Étudier les extremum locaux de f.
2) Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2+y^2 \leq 1\}$. Montrer que f a un maximum M et un minimum m sur B.
3) Soit $(a,b) \in B$. Montrer que si $f(a,b) = M$ ou $f(a,b) = m$, alors $a^2+b^2 = 1$.
4) Étudier la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$. On pose

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \geq 0,\ y \geq 0 \ et \ x+y \leq 1\}$$

1) Montrer que f est bornée sur K et y atteint ses bornes.
2) Déterminer le maximum et le minimum de f dans K, ainsi que les points où ils sont atteints.
3) Déduire de ce qui précède que f est majorée sur $A = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$ et déterminer $\sup\limits_{(x,y)\in A} f(x,y)$

Exercice 21. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^2+y)e^{-x^2-y^2}$.
1) a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x^2+y| \leq x^2+y^2+1$. En déduire que $f(x,y) \to 0$ quand $x^2+y^2 \to +\infty$.
b) Montrer que les ensembles

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ f(0,1) \leq f(x,y)\} \quad et \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ f(x,y) \leq f(0,-1)\}$$

sont compacts.
c) En déduire que f est majorée et minorée dans $\mathbb{R}^2$, et qu'elle atteint son maximum dans A et son minimum dans B.
2) Trouver les points critiques de f dans $\mathbb{R}^2$.
3) Déterminer le maximum et le minimum de f dans $\mathbb{R}^2$ ainsi que les points où ils sont atteints.