

Feuille d'exercices MP: Espace vectoriel normé(1).

A.ELAKILI

3 octobre 2010

Mathématiques.elakili : <http://perso.menara.ma/~abdelakili/>

David Hilbert (23 janvier 1862 - 14 février 1943)

David Hilbert est unanimement reconnu comme la figure emblématique des maths du XX^e s. Son oeuvre est immense, comparable à celle de Poincaré. Surtout, Hilbert a donné l'impulsion de nombreuses recherches mathématiques du XX^e s., et a créé une école allemande qui domina trente années durant.

La légendaire distraction des mathématiciens ne se dément pas avec Hilbert. On rapporte qu'un jour, les Hilbert recevant des invités à dîner, Mme Hilbert demanda à son mari de changer de chemise. Le temps passa, les invités arrivèrent, mais Hilbert ne descendait pas. L'explication ? En enlevant sa chemise, il avait commencé une séquence de gestes qui l'avait amené droit au lit et dans un sommeil profond !

Exercice 1

Si deux boules fermées $B_f(a, r)$ et $B_f(a', r')$ d'un e.v.n E non nul sont égales. Montrer que : $a = a'$ et $r = r'$.

Exercice 2

Soit E un e.v.n non nul et $a \in E$. Pour tout $r > 0$, montrer que l'adhérence de $B(a, r)$ est $B_f(a, r)$, que l'intérieur de $B_f(a, r)$ est $B(a, r)$, et que $S(a, r)$ est d'intérieur vide.

Exercice 3

Montrer que N , définie sur \mathbf{R}^2 par $N(x, y) = \max(|x|, |y|, |x - y|)$, est une norme sur \mathbf{R}^2 . Représenter la boule unité ouverte.

Exercice 4

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})\}$. On pose pour tout $f \in E$,

$$N(f) = \sqrt{|f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt}.$$

1. Montrer que N est une norme euclidienne sur E .
2. Etablir que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}.N(f)$.
3. Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel normé et soit A un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que si A est un ouvert, alors $A = E$.
2. Montrer que s'il existe $a \in A$ et $r > 0$ tel que : $B(a, r) \subset A$, alors $A = E$.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n .

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E . Montrer que A est fermé (on pourra soit utiliser une base bien choisie de E , soit utiliser un produit scalaire sur E).
2. Montrer que E est le seul sous-espace vectoriel de E qui soit aussi ouvert.

Exercice 7

Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E .

On pose $A + B = \{x \in E / x = a + b \text{ avec } a \in A \text{ et } b \in B\}$.

En remarquant que $A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b)$, montrer que la somme d'une partie quelconque et d'un ouvert est un ouvert.

Exercice 8

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on associe les normes :

$$\|A\|_p = \sup_{\|X\|_p=1} \|A.X\|_p \quad p \in \{1, \infty\}.$$

Vérifier que pour $A = (a_{i,j})$ on a :

$$\|A\|_1 = \sup_j \sum_i |a_{i,j}|, \quad \|A\|_\infty = \sup_i \sum_j |a_{i,j}|.$$

Exercice 9

Soit \mathcal{C} l'espace vectoriel des suites convergentes de nombres réels et \mathcal{C}_0 le sous-espace vectoriel des suites convergentes vers 0. On munit \mathcal{C} et \mathcal{C}_0 de la norme l^∞ définie par :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|.$$

1. Montrer que \mathcal{C}_0 est fermé dans \mathcal{C} .
2. On définit une application T de \mathcal{C} dans \mathcal{C} , en associant à la suite (x_n) la suite (y_n) définie par : $y_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $y_n = x_{n-1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ pour $n \geq 1$.
 - (a) Montrer que T est linéaire continue et calculer $\|T\|$.
 - (b) Montrer que T est bijective.
 - (c) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{C}$, $\|T(x)\| \geq \frac{1}{2} \|x\|$.
 - (d) Conclure que \mathcal{C} et \mathcal{C}_0 sont isomorphes.

Exercice 10

Soit K une partie compacte de E .

1. Montrer qu'il existe deux points a et b de K tels que $\|b - a\| = \delta(K)$, diamètre de K .
2. Comment ces deux points se situent-ils par rapport à la frontière de K ?