

Feuille d'exercices : Algèbre linéaire et dualité.

A.ELAKILI

2 octobre 2010

Mathématiques.elakili : <http://perso.menara.ma/~abdelakili/>

Exercice 1

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E . Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ commute avec p si, et seulement si, les sous espaces $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par p .

Exercice 2

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E . Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, on a : $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 3

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que la matrice A est inversible.

Une telle matrice est dite à "diagonale dominante".

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ et $\phi : E \longrightarrow E$ définie par : $f \longmapsto \phi(f)$ telle que :

$$\forall x > 0, \quad \phi(f)(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t) dt, \quad \text{et} \quad \phi(f)(0) = 0.$$

Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(E)$, déterminer $\ker(\phi)$ et $\text{Im}(\phi)$.

Exercice 5

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Si u est une application linéaire de E vers F , on appelle application transposée de u , et l'on note ${}^t u$, l'application de F^* vers E^* définie par : ${}^t u(\phi) = \phi \circ u$.

Montrer que l'application ${}^t u$ appartient à $\mathcal{L}(F^*, E^*)$ et que si \mathcal{B} et \mathcal{C} sont des bases de E et F , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*}({}^t u) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u).$$

Exercice 6

On appelle dérivation de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ toute endomorphisme D de cet espace vérifiant :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad D(MN) = D(M)N + MD(N).$$

1. Montrer que pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'application $D_A : M \mapsto AM - MA$ est une dérivation, appelée dérivation intérieure associée à A , de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Déterminer les matrices A telles que D_A soit nulle.
2. Montrer que toute dérivation D de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est de la forme D_A pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (on considérera les matrices $DE_{i,j}$ où $E_{i,j}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.)

Exercice 7

Soit F un sous espace vectoriel de E espace vectoriel, et :

$$A = \{f \in \mathcal{L}(E) / F \subset \ker(f)\}.$$

Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Si E est de dimension finie, quelle est la dimension de A ?

Exercice 8

Soit Δ l'application de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in E, \quad (\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que Δ est une application linéaire de E de noyau \mathbf{R} et d'image E .
2. Montrer qu'il existe une unique base $(H_n)_n \in \mathbf{N}$ de E telle que : $H_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \Delta(H_n) = H_{n-1} \text{ et } H_n(0) = 0.$$

En déduire que tout polynôme P de E peut s'écrire :

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^n P)(0) H_n.$$

3. Montrer que l'on a :

$$(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k P(k).$$

Exercice 9

Soit A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ peut s'écrire sous la forme $AN - NA$ avec $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ si, et seulement si, elle vérifie :

$$\forall P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad AP = PA \implies \text{tr}(MP) = 0.$$