Dualité en dimension finie

A.ELAKILI

26 septembre 2010

Mathématiques.elakili : http ://perso.menara.ma/∼abdelakili/

1 Formes linéaires, hyperplans.

E désigne un $\mathbf{K}$ espace vectoriel. **Définition :** On appelle **forme linéaire** sur E toute applications linéaire de E dans $\mathbf{K}$ c'est à dire tout élément de $\mathcal{L}(E,\mathbf{K})$.
L'ensemble des formes linéaires sur E est appelé **dual** de E et noté E^*, ainsi : $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbf{K})$.

Définition : un sous espace vectoriel H de E est appellé **hyperplan** de E s'il est de codimension 1, c'est à dire il existe $a \in E$ non nul tel que : $H \oplus \mathbf{K}.a = E$.

Exemple : Dans $E = \mathbf{K}[X]$, $H = \{P \in E/P(0) = 0\} = X.\mathbf{K}[X]$ est un hyperplan de E car : $H \oplus \mathbf{K} = E$.

Théoréme : Si $\phi \in E^*$, non nulle alors $\ker(\phi)$ est un hyperplan de E et pour tout $a \in E \setminus \ker(\phi)$ on a : $\ker(\phi) \oplus \mathbf{K}.a = E$.

Si $\psi \in E^*$ tel que ψ s'annule sur $\ker(\phi)$ alors ϕ et ψ sont coliénaires.

2 Base duale.

Dans tout la suite E désigne un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$.

Théoréme et définition : Soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ il existe une unique forme linéaire e_i^* vérifiant : $e_i^*(e_j) = \delta_i^j$, de plus on a les résultats suivants :

- La famille $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^* appelée **base duale** de la base B notée B^*.
- $$\forall x \in E : \quad x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x).e_k.$$
  e_k^* n'est d'autre que la fonction k éme coordonnée relativement à la base B.
- $$\forall \phi \in E^* : \quad \phi = \sum_{k=1}^{n} \phi(e_k).e_k^*$$
  .

Remarques :

1. Si l'on note respectivement $X = (x_i)$ et $C = (\lambda_i)$ les matrices de x et ϕ dans les bases B et B^*, on a alors :
$$\phi(x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = {}^tCX.$$

2. La matrice de la forme linéaire $\phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . e_i^*$, considérée comme une application linéaire, dans les bases B de E et (1) de $\mathbf{K}$ est la matrice ligne :

$$L = (\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Cette matrice, que l'on appelle la matrice de ϕ dans B, est la transposée de la matrice de ϕ dans B^*.
Si $X = (x_i)$ est la matrice de $x \in E$, on a :

$$\phi(x) = LX = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n.$$

3 Intersection d'hyperplans.

Théoréme : Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une famille de p vecteurs de E et :

$$f : E^* \longrightarrow \mathbf{K}^p,\ \phi \longmapsto f(\phi) = (\phi(e_1, \phi(e_2), ..., \phi(e_p))$$

alors on a :
f est un isomorphisme si et seulement si : $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base de E.
f est surjective si et seulement si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est libre, et dans ces conditions, $\ker(f)$ est de codimension p et tout vecteur x en lequel les éléments de $\ker(\phi)$ s'annulent est combinaison linéaire des $e_1, ..., e_p$.

Conséquence : Si on connait une base $(\phi_1, ..., \phi_{n-p})$ de $\ker(f)$ et si H_i est l'hyperplan $\ker(\phi_i)$, alors on a :

$$F = \bigcap_{i=1}^{n-p} H_i = \{x \in \mathbf{K}^n / \phi_i(x) = 0, \forall i \in [|1, n-p|]\} = vect(e_1, ..., e_p).$$

$$F \text{ a pour équation : } \begin{cases} \phi_1(x) = 0 \\ \phi_2(x) = 0 \\ . \\ . \\ \phi_{n-p}(x) = 0 \end{cases}$$

Théoréme : Soit $(\phi_1, ..., \phi_p)$ une famille de p vecteurs de E^* et :

$$f : E \longrightarrow \mathbf{K}^p, x \longmapsto f(x) = (\phi_1(x), ...\phi_p(x)).$$

Alors f est linéaire et on a :
f est un ismorphisme si et seulement si $(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p)$ est une base de E^*.

Conséquence : Si $(\phi_1, ..., \phi_p)$ est une base de E^*, soit $(e_1, ..., e_p)$ la base canonique de $\mathbf{K}^p$ en posant pour tout $i \in [|1, p|]$: $e'_i = f^{-1}(e_i)$ on a :
$(e'_1, ..., e'_p)$ est une base de E dont $(\phi_1, ..., \phi_p)$ est la base duale, on parle de **base préduale** ou **base antiduale** de $(\phi_1, ..., \phi_p)$.

Théoréme : Avec les mêmes notations que le théoréme précédent on a :
f est surjectif si et seulement si $(\phi_1, ..., \phi_p)$ est libre, dans ce cas $\ker(f)$ est de codimension p et toute forme linéaire s'annulant sur $\ker(f)$ est combinaison linéaire de $\phi_1, ..., \phi_p$.