BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
285
CCIP_M2_T

Concepteur : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 7 mai 2008, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Dans cet exercice, on note ln le logarithme népérien.

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}dx$, et donc en particulier, on a : $u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx$.

1. Vérifier que, pour tout réel x différent de 1 et de -1, on a :
$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x}.$$

2. On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $[0, \frac{1}{2}]$ par : $f(x) = \ln(1-x)$, $g(x) = \ln(1+x)$ et $h(x) = \ln(1-x^2)$.
   (a) Calculer, pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$, les dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$.
   (b) Exprimer, pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$, $h(x)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$.
   (c) En déduire, pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$, la dérivée $h'(x)$.

3. Déduire des questions 2(a) et 2(c) respectivement, que l'on a : $u_0 = \frac{\ln 3}{2}$ et $u_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

4. (a) Montrer, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante : $u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.
   (b) En déduire les valeurs de u_2 et de u_3.

5. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 0$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. (a) Montrer que pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$, on a : $\frac{1}{1-x^2} \leqslant \frac{4}{3}$.
   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante : $u_n \leqslant \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$.
   (c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
7. On pose, pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, c'est-à-dire, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
   (a) Donner, pour tout réel x différent de 1, l'expression sous forme de fraction, de la somme : $1+x+\ldots+x^n$.
   (b) Établir l'égalité : $S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}dx$.
   (c) Établir, pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}dx \leqslant 2u_{n+1}.$$

   (d) En déduire l'expression de la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$, sous la forme d'une intégrale.
   (e) En réduisant au même dénominateur, pour tout réel x de l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, l'expression :
   $\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x}$, déduire de la question 7.(d) la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 2

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3.
   (b) En déduire A^n pour tout entier n supérieur ou égal à 3.
2. Dans cette question, M désigne une matrice carrée d'ordre 3 qui commute avec la matrice A, c'est-à-dire qui vérifie la relation : $AM = MA$.
   On pose : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que les matrices qui commutent avec A sont de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI + bA + cA^2.$$

   (b) En déduire que l'on a : $M^2 = a^2 I + 2abA + (b^2 + 2ac)A^2$.
   Écrire explicitement la matrice M^2 en fonction de a,b et c.
3. On se propose de montrer qu'il n'existe aucune matrice N, carrée d'ordre 3, telle que $N^2 = A$.
   (a) Montrer que si une telle matrice N existait, alors elle vérifierait : $AN = NA$.
   (b) En utilisant la question 2.(b), en déduire qu'il n'existe pas de matrice N telle que $N^2 = A$.

4. L'objectif de cette question est de trouver les matrices P, carrées d'ordre 3, vérifiant $PA = P - A$.
   (a) Justifier que la matrice $I - A$ est inversible.
   (b) Développer le produit $(I - A)(I + A + A^2)$, et en déduire l'inverse de la matrice $I - A$ en fonction de I, A et A^2.
   (c) Soit P une matrice vérifiant : $PA = P - A$.
   Montrer que : $P = A(I - A)^{-1}$, et en déduire l'expression de P en fonction de A et de A^2.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{2} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, X désigne une variable aléatoire admettant f pour densité.

2. (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
   (b) Montrer que l'espérance de X, notée $E(X)$, est égale à $\dfrac{4}{3}$.
   (c) Calculer la valeur de $E(X^2)$ et celle de la variance $V(X)$ de X.
3. On note U la variable aléatoire définie par : $U = X^2$; on pose : $Y = \dfrac{U}{4}$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition K de U, puis celle H de Y.
   (b) Établir qu'une densité h de Y est donnée par : $\begin{cases} h(x) = 1 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ h(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
   Reconnaître la loi suivie par Y.
   (c) Calculer la valeur de l'espérance $E(Y)$ de Y.

Soit n un entier supérieur ou égal 2. Dans la suite, on considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, suivant toutes la même loi que X.

4. On note Z_n la variable aléatoire définie par : $Z_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout réel x, on a : $[Z_n \leqslant x] = ([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x])$.
   (a) Montrer que la fonction de répartition G de Z_n est donnée par :

$$\begin{cases} G(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ G(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n} \text{ si } 0 \leq x \leq 2. \\ G(x) = 1 \text{ si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

   (b) Calculer une densité g de Z_n.
   (c) Calculer l'espérance de Z_n, notée $E(Z_n)$, ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Une urne contient 10 boules blanches et 2 boules noires. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche.
On désigne alors par X la variable aléatoire égale au nombre total de boules prélevées. La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$.
Le but de l'exercice est de calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X, de deux manières différentes.

Partie 1 : première méthode

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Calculer la valeur de $P([X = 1])$.
   (c) Montrer que $P([X = 2]) = \dfrac{5}{33}$.
   (d) Calculer $P([X = 3])$.
2. Montrer que $E(X) = \dfrac{13}{11}$.
3. Calculer $E(X^2)$ et en déduire que $V(X) = \dfrac{65}{363}$.

Partie 2 : deuxième méthode

Dans cette partie, on suppose que les deux boules noires sont marquées N et N'.
On note Y (respectivement Y') la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire marquée N (respectivement N') est prélevée avant l'apparition d'une boule blanche, et qui vaut 0 sinon.
Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant 2$, on note N_i (respectivement N'_i) l'événement : « la boule noire marquée N (respectivement N') est obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

1. (a) Exprimer l'événement $[Y = 1]$ en fonction de N_1, N'_1 et N_2.
   (b) En déduire que la variable aléatoire Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{11}$.
   (c) Donner la loi de la variable aléatoire Y'.
2. Justifier que : $X = 1 + Y + Y'$.
3. Déduire de ce qui précède la valeur de $E(X)$.
4. (a) Exprimer l'événement $([Y = 1]) \cap [Y' = 1])$ à l'aide des événements N_1 et N'_1.
   (b) En déduire la valeur de $P([Y = 1] \cap [Y' = 1])$.
   (c) Calculer la valeur de la covariance de Y et Y', notée $\text{cov}(Y, Y')$.
   (d) Utiliser alors le résultat de la question 2 de cette partie pour déterminer $V(X)$, et retrouver ainsi le résultat de la question 3 de la partie 1.