

Intégrales généralisées.

Exercice 1 Etudier la nature de l'intégrale généralisée : $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 Etudier la nature de l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x(2+\sqrt{x})} dx \text{ et } \int_0^3 \frac{\ln x}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

Exercice 3 Etudier la nature de l'intégrale généralisée :

$$\int_0^2 \frac{1-e^t+a \sin t}{t^2} dt, a \in \mathbb{R}; \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Exercice 4 Soit Γ la fonction réelle définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de Γ .

2) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3) En déduire l'expression de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 Existence et valeur des intégrales généralisées :

$$I = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

Exercice 6 Soit n un entier naturel non nul, on considère les deux intégrales :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n-1)x]}{\sin x} dx \text{ et } v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} dx.$$

1) Justifier l'existence de u_n et v_n .

2) a) Calculer $u_{n+1} - u_n$.

b) Déterminer l'expression de u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 7 1) Justifier l'existence de : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$.

Montrer que : $I = J$.

2) Du calcul de $I + J$, déduire la valeur de I .

3) Existence et valeur de $\int_0^{\pi} \ln(1 - \cos x) dx$.

Exercice 8 1) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$.

2) a) Soit n un entier naturel, étudier la convergence de $\int_0^1 t^n \ln t dt$ et donner sa valeur.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t} dt = 0$, et en déduire une expression de la première intégrale comme somme d'une série classique.

Exercice 9 Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}^+ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)| \leq k.t^n.$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$. On notera $L(f)(x)$ sa valeur.

2) Soit x_0 un réel strictement positif, montrer que pour tout réel $x > \frac{x_0}{2}$ et pour tout réel $t \geq 0$, on a l'inégalité :

$$|e^{-xt} - e^{-xt_0} + t(x - x_0)e^{-tx_0}| \leq t^2 \frac{(x - x_0)^2}{2} e^{-\frac{tx_0}{2}}.$$

3) En déduire que la fonction $L(f)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que :

$$\forall x > 0, [L(f)]'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} . t . f(t) dt.$$