Exercice 1

On posséde une piéce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit $0,3$.

On lance 10 fois la piéce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?

Exercice 2

On considére un dé cubique truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k (c'est à dire de la forme $k.a$).

Soit X la variable aléatoire associée au lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose : $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Calculer $E(Y)$.

Exercice 4 (**Extrait du concours INSEEC 2002**).

On considére deux piéces de monnaie truquées M_1 et M_2.
Lorsqu'on lance la piéce M_1, la probabilité d'avoir face est égale à $\dfrac{1}{3}$ et lorsqu'on lance la piéce M_2, la probabilité d'avoir face est égale à $\dfrac{2}{9}$.

On effectue une succession de parties de la facon suivante :

- A la premiére partie, on prend une des deux piéces au hasard et on lance cette piéce; si le résultat est face, on joue la deuxiéme partie avec M_1, sinon on joue avec M_2.

- Pour tout entier $n \geq 1$, on joue la $(n+1)^{ime}$ partie avec M_1 si on a obtenu face à la n^{ime} partie; on joue la $(n+1)^{ime}$ partie avec M_2 si on a obtenu pile à la n^{ime} partie.

On note U_n la probabilité d'avoir face à la n^{ime} partie.

1. En utilisant la formule de probabilités totales :
   (a) Calculer les valeurs de U_1 et U_2.
   (b) Etablir que pour tout $n \geq 1$: $U_{n+1} = \dfrac{1}{9}.U_n + \dfrac{2}{9}$.
2. Calculer U_n en fonction de n.
3. Pour tout entier $n \geq 1$ on note X_n la variable aléatoire associée à la n^{ime} partie qui prend la valeur 1 si le résultat de la n^{ime} partie est face et 0 sinon.

   Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer leurs espérances mathématiques.

Exercice 5 (**Extrait du concours INSEEC 2001**).

Un organisme de voyages fait une étude sur le choix des vacances. Ce choix porte sur la France et l'étranger.

Au départ, chaque client choisit la France avec la probabilité $\dfrac{3}{4}$ et l'étranger avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

Si la n^{ime} année, le client a choisir la France, la probabilité de choisir la France l'année suivante est $\dfrac{3}{4}$.

Si la n^{ime} année ,le client a choisi l'étranger, la probabilité de choisir la France l'année suivante est $\dfrac{1}{2}$.

On note F_n l'événement "le client a choisi la France la n^{ime} année" et p_n la probabilité de l'événement F_n.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 6

Dans une urne il y a k boules blanches et $n-k$ boules noires $(1 \leq k \leq n-1)$.
On les tire une à une et sans remise. On introduit une variable aléatoire X associée au rang de la derniére boule blanche tirée.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} C_i^p = C_{p+1}^{n+1}$.
3. En déduire $E(X)$.