

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{(x-1)(e^x+1)}{2}$

le but de ce problème est d'étudier des suites récurrentes vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ avec différentes valeurs de u_0 .

1. Etude du sens de variation de f .
 - a) Soit g définie par $g(x) = xe^x + 1$. Etudier le sens de variation de g et en déduire son signe.
 - b) Montrer que f est croissante sur \mathbb{R} .
 2. Etude du signe de la fonction k définie par $k(x) = xe^x - 1$.
 - a) Etudier le sens de variation de k et sa limite en $-\infty$.
 - b) Montrer que l'équation $k(x) = 0$ a une unique solution que l'on notera γ et que $0 < \gamma < 1$.
 - c) En déduire le signe de $k(x)$.
 3. Etude du signe de $h(x) = f(x) - x = \frac{e^x(x-1) - (x+1)}{2}$.
 - a) Déterminer le sens de variation de h , sa valeur en 0 et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
(On admettra que $xe^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et que $x/e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$)
 - b) En déduire que h s'annule en deux points que l'on notera α et β avec $-2 < \alpha < 0 < \beta < 2$.
 - c) Montrer que pour $\alpha < x < \beta$, on a $f(x) < x$, et que si $x < \alpha$ ou $\beta < x$, on a $f(x) > x$
 4. On suppose ici que $u_0 < \alpha$
 - a) Montrer que pour tout n entier, $u_n < \alpha$.
 - b) En déduire que pour tout entier n , $u_n < u_{n+1}$.
 - c) Montrer que u converge et que sa limite est α .
 5. On suppose ici que $\alpha < u_0 < \beta$
 - a) Montrer que $\alpha < u_1 < u_0 < \beta$
 - b) En déduire que pour tout entier n , $\alpha < u_{n+1} < u_n < \beta$
 - c) Montrer que u converge et que sa limite est α .
 6. On suppose ici que $\beta < u_0$
 - a) Montrer que u est croissante.
 - b) Montrer que si u est majorée alors elle converge vers α ou β .
 - c) En déduire la limite de u .
 7. Questions subsidiaire: Montrer que $\beta = -\alpha$.
-