1. Propriétés de la fonction f définie par: $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

   a) Déterminer son ensemble de définition et montrer que f est une fonction paire.

   b) Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

   c) Déterminer l'asymptote de la courbe représentative de f en$+\infty$.

   d) Montrer que pour tout x réel, $f(x) > x$.

   e) Résoudre l'équation $f(x) < x + 1$.

   f) Tracer sur un même graphique la courbe représentative de f ainsi que les droites d'équation: $y = x$ et $y = x + 1$.

2. Etude de la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n, $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Déduire de **1.** que la suite u est croissante.

   b) On suppose que la suite u est majorée
   Montrer qu'elle est alors convergente et que sa limite ℓ vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$

   c) Déterminer la limite de la suite u.

3. Majorations par une autre suite.

   a) A l'aide de la partie **1.** montrer que pour tout entier n, $\quad u_{n+1} < u_n + 1$
   En déduire par récurrence cette première majoration : pour tout entier n, $\quad u_n < n + 1$.

   b) Montrer par récurrence cette second majoration : pour tout entier n, $\quad u_n \leq \ln(n + 1)$.