

Exercice 1 (Probabilité)

On dispose d'un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence. On sait que 50 de ces pièces sont équilibrées tandis que les 50 autres sont truquées. Pour une pièce truquée, la probabilité d'apparition de "pile" lors d'un jet de cette pièce vaut $3/4$.

On suppose que, pour une pièce donnée les différents lancers sont indépendants les uns des autres.

1. (a) On prend une pièce au hasard dans ce lot et on la lance. Le résultat de ce jet est "pile".
Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?
- (b) On relance cette même pièce et on obtient à nouveau "pile".
Quelle est alors la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?
2. On désire effectuer un tri des pièces pour tenter d'éliminer celles qui sont truquées. Pour cela on prend les pièces du lot une à une et on lance chaque pièce deux fois.
* Si au cours des deux lancers on obtient au moins un "pile", on décide d'éliminer la pièce.
* Dans le cas contraire, on la conserve.
 - (a) Quelle est la probabilité d'éliminer une pièce quand elle est équilibrée ?
 - (b) Quelle est la probabilité de conserver une pièce quand elle est truquée ?
 - (c) On note X_1 le nombre de pièces truquées et X_2 le nombre de pièces équilibrées qui sont ainsi éliminées.
Déterminer les lois de X_1 et X_2 ainsi que leurs espérances.
Que dire de l'efficacité du tri ?
Donner enfin le nombre moyen de pièces éliminées.

Exercice 2 (Séries Numériques)

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \frac{1}{C_{n+p}^n}$ où p désigne un entier naturel fixé.

1. Montrer que si $p = 0$ ou $p = 1$ la série de terme général u_n diverge.
On suppose dans toute la suite que $p \geq 2$ et on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.
(b) En déduire par récurrence sur n que : $S_n = \frac{1}{p-1}(1 - (n+p+1)u_{n+1})$.
3. (a) On pose $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
(b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite $l \geq 0$.
(c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme en fonction de p et l .
4. On suppose que $l = 0$, donner alors en fonction de p la somme de la série de terme général u_n .

* * * * * **Bonne Chance.**